69. 定積変化・断熱変化

状態 a,b,c,d における圧力を $p_{\mathrm{a}}, p_{\mathrm{b}}, p_{\mathrm{c}}, p_{\mathrm{d}}$ とすると,

それぞれの状態数は,

状態 a$(p_{\mathrm{a}}, V_1, T_{\mathrm{a}})$，状態 b$(p_{\mathrm{b}}, V_2, T_{\mathrm{b}})$，状態 c$(p_{\mathrm{c}}, V_2, T_{\mathrm{c}})$，状態 d$(p_{\mathrm{d}}, V_1, T_{\mathrm{d}})$

と表される。

(1)

斜線部の面積 W は,

状態 c から状態 d へ変化したとき，気体が外部に対してした仕事から

状態 a から状態 b へ変化したとき，気体が外部からされた仕事を引いた値である。

ということは,

状態 c から状態 d へ変化したとき，気体が外部に対してした仕事に

状態 a から状態 b へ変化したとき，気体が外部に対してした仕事を足した値である。

そこで,

状態 a から状態 b へ変化したとき，気体が外部に対してした仕事を W_{ab}

状態 c から状態 d へ変化したとき，気体が外部に対してした仕事を W_{cd}

とすると,

断熱変化の熱力学第 1 法則の式 : 0 = 内部エネルギー変化＋気体が外部に対してした仕事

より,

状態 a から状態 b への断熱変化

$$0 = C_v(T_{\mathrm{b}} - T_{\mathrm{a}}) + W_{\mathrm{ab}}$$

$$\therefore W_{\mathrm{ab}} = -C_v(T_{\mathrm{b}} - T_{\mathrm{a}}) \quad ・・・①$$

状態 c から状態 d への断熱変化

$$0 = C_v(T_{\mathrm{d}} - T_{\mathrm{c}}) + W_{\mathrm{cd}}$$

$$\therefore W_{\mathrm{cd}} = -C_v(T_{\mathrm{d}} - T_{\mathrm{c}}) \quad ・・・②$$

①，②より,

$$W = W_{\mathrm{ab}} + W_{\mathrm{cd}} = C_v(T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{b}} + T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{d}}) \quad ・・・(答)$$

(2)

（ア）

状態 $\mathrm{b}\left(p_{\mathrm{b}}, V_2, T_{\mathrm{b}}\right)$ から状態 $\mathrm{c}\left(p_{\mathrm{c}}, V_2, T_{\mathrm{c}}\right)$ への変化において，

系が吸収した熱量を Q_{bc} とすると，

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{bc}} &= \Delta U_{\mathrm{bc}} + W_{\mathrm{bc}} \\ &= C_v\left(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{b}}\right) + 0 \quad \Longleftarrow \text{体積の変化が 0 だから，} W_{\mathrm{bc}} = 0 \\ &= C_v\left(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{b}}\right) \end{aligned}$$

ここで， $p_{\mathrm{c}}V_2 = RT_{\mathrm{c}}$， $p_{\mathrm{b}}V_2 = RT_{\mathrm{b}}$， $p_{\mathrm{c}}V_2 > p_{\mathrm{b}}V_2$ より， $T_{\mathrm{c}} > T_{\mathrm{b}}$

よって，

$Q_{\mathrm{bc}} = C_v\left(T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{b}}\right) > 0$ ・・・(答)

（イ）

状態 $\mathrm{d}\left(p_{\mathrm{d}}, V_1, T_{\mathrm{d}}\right)$ から状態 $\mathrm{a}\left(p_{\mathrm{a}}, V_1, T_{\mathrm{a}}\right)$ への変化において，

系が吸収した熱量を Q_{da} とすると，

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{da}} &= \Delta U_{\mathrm{da}} + W_{\mathrm{da}} \\ &= C_v\left(T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{d}}\right) + 0 \quad \Longleftarrow \text{体積の変化が 0 だから，} W_{\mathrm{da}} = 0 \\ &= C_v\left(T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{d}}\right) \end{aligned}$$

ここで， $p_{\mathrm{a}}V_1 = RT_{\mathrm{a}}$， $p_{\mathrm{d}}V_1 = RT_{\mathrm{d}}$， $p_{\mathrm{d}}V_1 > p_{\mathrm{a}}V_1$ より， $T_{\mathrm{a}} < T_{\mathrm{d}}$

よって，

$Q_{\mathrm{da}} = C_v\left(T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{d}}\right) < 0$ ・・・(答)

(3)

各状態の変化の熱力学第 1 法則の式

状態 a から状態 b： $0 = \Delta U_{\rm ab} + W_{\rm ab}$ ・・・③

状態 b から状態 c： $Q_{\rm bc} = \Delta U_{\rm bc}$ ・・・④

状態 c から状態 d： $0 = \Delta U_{\rm cd} + W_{\rm cd}$ ・・・⑤

状態 d から状態 a： $Q_{\rm da} = \Delta U_{\rm da}$ ・・・⑥

ここで，③，④，⑤，⑥の左辺と右辺で和をとると，

$Q_{\rm bc} + Q_{\rm da} = \Delta U_{\rm ab} + \Delta U_{\rm bc} + \Delta U_{\rm cd} + \Delta U_{\rm da} + W_{\rm ab} + W_{\rm cd}$ ・・・⑦

となり，これは，1 サイクルの状態変化についての熱力学第 1 法則の式を表す。

$\Delta U_{\rm ab} + \Delta U_{\rm bc} + \Delta U_{\rm cd} + \Delta U_{\rm da}$ について

1 サイクルすると内部は初めの状態に戻るから，

内部エネルギーも初めのエネルギーに戻る。

よって，1 サイクルの内部エネルギー変化は 0 である。

すなわち $\Delta U_{\rm ab} + \Delta U_{\rm bc} + \Delta U_{\rm cd} + \Delta U_{\rm da} = 0$ ・・・⑧

Q_1 について

$Q_{\rm bc} > 0$ より， $Q_1 = |Q_{\rm bc}| = Q_{\rm bc}$

$\therefore Q_{\rm bc} = Q_1$ ・・・⑨

Q_2 について

$Q_{\rm da} < 0$ より， $Q_2 = |Q_{\rm da}| = -Q_{\rm da}$

$\therefore Q_{\rm da} = -Q_2$ ・・・⑩

(1)より， $W = W_{\rm ab} + W_{\rm cd}$ ・・・⑪

⑧，⑨，⑩，⑪を⑦に代入すると，

$Q_1 - Q_2 = W$ ・・・(答)

(4)

熱効率 $e=\dfrac{\text{仕事}}{\text{熱エネルギー的収入}}$ より，

$$e=\frac{W}{Q_1}=\frac{W}{Q_{\mathrm{bc}}}=\frac{C_v\left(T_{\mathrm{a}}-T_{\mathrm{b}}+T_{\mathrm{c}}-T_{\mathrm{d}}\right)}{C_v\left(T_{\mathrm{c}}-T_{\mathrm{b}}\right)}=\frac{T_{\mathrm{a}}-T_{\mathrm{d}}}{T_{\mathrm{c}}-T_{\mathrm{b}}}+1 \quad ・・・⑫$$

ここで，

n モルの気体の断熱変化について，

断熱変化 $pV^{\gamma}=$ 一定， $pV^{\gamma}=\dfrac{nRT}{V}V^{\gamma}=nRTV^{\gamma-1}$ より，

「$TV^{\gamma-1}=$ 一定」が成り立つ。

これを使って，

状態 c から状態 d への断熱変化および状態 a から状態 b への断熱変化について考えると，

$$T_{\mathrm{c}}{V_2}^{\gamma-1}=T_{\mathrm{d}}{V_1}^{\gamma-1} \quad ・・・⑬$$

$$T_{\mathrm{b}}{V_2}^{\gamma-1}=T_{\mathrm{a}}{V_1}^{\gamma-1} \quad ・・・⑭$$

$\dfrac{⑬}{⑭}$ より， $\dfrac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{b}}}=\dfrac{T_{\mathrm{d}}}{T_{\mathrm{a}}}$

$\dfrac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{b}}}=\dfrac{T_{\mathrm{d}}}{T_{\mathrm{a}}}=k$ とおくと，

$$T_{\mathrm{c}}=kT_{\mathrm{b}},\quad T_{\mathrm{d}}=kT_{\mathrm{a}} \quad ・・・⑮$$

⑫，⑮より，

$$e=1+\frac{T_{\mathrm{a}}-kT_{\mathrm{a}}}{kT_{\mathrm{b}}-T_{\mathrm{b}}}=1-\frac{T_{\mathrm{a}}(1-k)}{T_{\mathrm{b}}(1-k)}=1-\frac{T_{\mathrm{a}}}{T_{\mathrm{b}}}$$

ここで，⑭より， $\dfrac{T_{\mathrm{a}}}{T_{\mathrm{b}}}=\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ だから，

$$e=1-\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad ・・・(\text{答})$$