

72. シリンダー内の気体の状態変化

(1)

(a)

断熱変化である。

$$pV^{\frac{5}{3}} = \text{一定} \text{ と } p = \frac{RT}{V} \text{ より, } RTV^{\frac{2}{3}} = \text{一定}$$

$$\text{よって, } TV^{\frac{2}{3}} = \text{一定}$$

体積と温度については, (V_0, T_0) から (aV_0, bT_0) に変化するから,

$$T_0 V_0^{\frac{2}{3}} = b T_0 (a V_0)^{\frac{2}{3}}$$

$$1 = b a^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore a = b^{-\frac{3}{2}} \quad \dots \text{(答)}$$

(b)

気体がピストンにした仕事は $-W$ だから,断熱変化の熱力学第 1 法則の式は, $0 = \Delta U + (-W)$

$$\therefore W = \Delta U = C_v \Delta T = \frac{3}{2} R(bT_0 - T_0) = \frac{3}{2} (b-1)RT_0 = \frac{3}{2} (b-1)p_0 V_0 \quad \dots \text{(答)}$$

(2)

(c)

等積変化である。

熱量が保存されるから,

物体の熱量変化 + シリンダー内の気体の熱量変化 = 0

シリンダー内の気体の変化は等積変化だから,

シリンダー内の気体の熱量変化 = 内部エネルギー変化

よって,

物体の熱量変化と内部エネルギー変化の和は 0 である。

物体の熱量変化 = $xR(cT_0 - T_0)$, 内部エネルギー変化 = $\Delta U = C_v \Delta T = \frac{3}{2} R(cT_0 - bT_0)$ より,

$$xR(cT_0 - T_0) + \frac{3}{2} R(cT_0 - bT_0) = 0$$

$$\therefore c = \frac{2x + 3b}{2x + 3} \quad \dots \text{(答)}$$

別解

まわりくどい解法であるが、

系は断熱圧縮を受けているから、物体の温度 T_0 より高温である。

よって、この等積変化で系は物体に熱を放出し、物体はその熱をもらうことになる。

系は放出した熱量だけその内部エネルギーが減少するから、

$$\text{系が放出した熱量} = \text{内部エネルギーの減少量} = |\Delta U| = |C_v \Delta T| = \frac{3}{2} R |cT_0 - bT_0|$$

系の温度は低下するから、 $cT_0 < bT_0$

$$\text{よって、系が放出した熱量} = \frac{3}{2} R (bT_0 - cT_0)$$

$$\text{これと、物体の熱量の増加量} = xR(cT_0 - T_0)$$

より、

$$\frac{3}{2} R (bT_0 - cT_0) = xR(cT_0 - T_0)$$

$$\therefore c = \frac{2x + 3b}{2x + 3c} \quad \dots \text{(答)}$$

(d)

等圧変化である。

熱量が保存されるから、

物体の熱量変化+シリンダー内の気体の熱量変化=0

シリンダー内の気体の変化は等圧変化だから、

変化後の温度を T' 、圧力を p とすると、状態 (p, aV_0, bT_0) から状態 (p, eV_0, T') への状態変化より、

$$\frac{bT_0}{paV_0} = \frac{T'}{peV_0}$$

$$\therefore T' = \frac{be}{a}T_0$$

変化後の物体の温度も T' だから、

$$\text{物体の熱量変化} = xR\Delta T = xR\left(\frac{be}{a}T_0 - T_0\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{シリンダー内の気体の熱量変化} = \Delta U + p\Delta V = \frac{3}{2}R\Delta T + R\Delta T = \frac{5}{2}R\Delta T = \frac{5}{2}R\left(\frac{be}{a}T_0 - bT_0\right)$$

 $\dots \textcircled{2}$

①, ②より、

$$xR\left(\frac{be}{a}T_0 - T_0\right) + \frac{5}{2}R\left(\frac{be}{a}T_0 - bT_0\right) = 0$$

$$\therefore 2x(be - a) + 5(be - ab) = 0$$

$$\therefore be(2x + 5) = a(2x + 5b)$$

$$\therefore e = \frac{a}{b} \cdot \frac{2x + 5b}{2x + 5}$$

$$\text{ここで、} a = b^{\frac{3}{2}} \text{より、} e = b^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{2x + 5b}{2x + 5}$$

$$\therefore e = \frac{2x + 5b}{b^{\frac{5}{2}}(2x + 5)} \quad \dots \text{(答)}$$

補足 1

$\frac{5}{2}R$ は、単原子分子の理想気体の定圧モル比熱 C_p である。

等圧変化の場合、系が吸収した熱を Q 、系の気体の物質量を n とすると、

$$Q = \Delta U + W = nC_p\Delta T$$

が成り立つ。

補足 2

系は断熱圧縮を受けているから、物体の温度 T_0 より高温である。

よって、系は物体に熱を与えながら収縮する。

すなわち $e < 1$ であることは明らかであるが、

$e = b^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{2x+5b}{2x+5}$ を b の関数と見なし、 $e < 1$ であることを示してみると、

$$\begin{aligned} e' &= -\frac{5}{2} b^{-\frac{7}{2}} \cdot \frac{2x+5b}{2x+5} + b^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{5}{2x+5} \\ &= -\frac{5}{2(2x+5)} \left(2xb^{-\frac{7}{2}} + 5b^{-\frac{5}{2}} - 2b^{-\frac{5}{2}} \right) \\ &= -\frac{5}{2(2x+5)} \left(2xb^{-\frac{7}{2}} + 3b^{-\frac{5}{2}} \right) < 0 \end{aligned}$$

より、 e は単調減少関数である。

また、

$b=1$ のとき、 $e=1$

断熱圧縮により、温度が T_0 から bT_0 になったから、 $bT_0 > T_0$ より、 $b > 1$

よって、 $e < 1$

(3)

(e)

等積変化である。

気体はシリンダーに閉じ込められているから、

(a)の状態変化前の状態 (p_0, V_0, T_0) と (e)の状態変化後の状態 (fp_0, eV_0, T_0) との間に、

$\frac{PV}{T}$ = 一定 の関係が成り立つ。

よって、

$$\frac{fp_0 \cdot eV_0}{T_0} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0}$$

$$\therefore ef = 1$$

$$\therefore f = \frac{1}{e} = \frac{b^{\frac{5}{2}}(2x+5)}{2x+5b} \quad \dots \text{(答)}$$