134. RLC 直列回路

(2)

たとえば，b に対する a の電圧をV_0，その最大値を$V_{0\max}$，角振動数をωとすると，
適当な基準時刻をとることにより，$V_0 = V_{0\max}\sin\omega t$ と表せる。
よって，a の極板の電荷をQとすると，$Q = CV_{0\max}\sin\omega t$　・・・①
また，極板 a に出入りする電流をIとすると，$I>0$ のときQは増加するから，

$$Idt = dQ \quad \therefore I = \frac{dQ}{dt} \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\begin{aligned}I &= \frac{dQ}{dt}\\ &= CV_{0\max}\frac{d\sin\omega t}{dt}\\ &= \omega CV_{0\max}\cos\omega t\\ &= \omega CV_{0\max}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

ここで，$\omega CV_{0\max}$は最大電流であり，これを$I_{\max}$とおくと，

$$I = I_{\max}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots ③$$

尚，$I_{\max} = \omega CV_{0\max} = \dfrac{V_{0\max}}{\dfrac{1}{\omega C}}$ とオームの法則 $I = \dfrac{V}{R}$ より，

$\dfrac{1}{\omega C}$ はオームの法則の抵抗Rに相当し，この$\dfrac{1}{\omega C}$を容量リアクタンスという。

①，③より，
コンデンサーを流れる電流の位相を基準にすると，
コンデンサーにかかる電圧の位相はそれより$\dfrac{\pi}{2}$遅れることになる。

つまり，V_0の位相は回路を流れる電流の位相より$\dfrac{\pi}{2}$遅れている。

よって，コンデンサーと抵抗の直列回路を流れる電流を$I = I_{\max}\sin\omega t$ とおけば，

コンデンサーにかかる電圧は，$V_0 = V_{0\max}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$　・・・④

一方，抵抗にかかる電圧は抵抗が 1Ω だから，$V_1 = 1\cdot I_{\max}\sin\omega t$　・・⑤
また，V_1の最大値を$V_{1\max}$とおくと，$V_{1\max} = 1\cdot I_{\max}$

④，⑤より，V_0の位相はV_1より$\frac{\pi}{2}$遅れている。

図 2 で，適当な定数A_0, B_0を用いると，波形 A は$-A_0\cos\omega t$，波形 B は$B_0\sin\omega t$と表せ，

$-A_0\cos\omega t = A_0\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$より，波形 A は波形 B より位相が$\frac{\pi}{2}$遅れていることがわかる。

よって，波形 A はV_0，波形 B はV_1である。

(3)

(2)の解説より，$I_{\max} = \omega C V_{0\max}$，$V_{1\max} = 1 \cdot I_{\max}$

条件より，$V_{0\max} = 40[\mathrm{V}]$，$V_{1\max} = 40 \times 10^{-3}[\mathrm{V}]$

図 2 より，周期$T = 1 \times 10^{-2}[\mathrm{s}]$

よって，

$$C = \frac{I_{\max}}{\omega V_{0\max}} = \frac{40 \times 10^{-3}}{\frac{2\pi}{1 \times 10^{-2}} \cdot 40} = \frac{1}{2\pi} \times 10^{-5}[\mathrm{F}]$$

(4)

(2)と同様に b に対する a の電圧をV_0とすると，$\frac{dI}{dt} > 0$のとき$V_0 > 0$だから，

$I = I_{\max}\sin\omega t$とすると，

$$\begin{aligned} V_0 &= L\frac{dI}{dt} \\ &= LI_{\max}\frac{d\sin\omega t}{dt} \\ &= \omega LI_{\max}\cos\omega t \\ &= \omega LI_{\max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

ここで$\omega LI_{\max} = V_{0\max}$とおくと，

$$V_0 = V_{0\max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

尚，$V_{0\max} = \omega LI_{\max}$とオームの法則$V = RI$より，

ωLはオームの法則の抵抗Rに相当し，これを誘導リアクタンスという。

一方，抵抗にかかる電圧は$V_1 = 1 \cdot I_{\max}\sin\omega t$

よって，V_0の位相はV_1より$\frac{\pi}{2}$進んでおり，図 3 でV_0を表す波形は，(2)と同様にして，

B となる。

よって，$V_{0\max}=10[\mathrm{V}]$，$V_{1\max}=1\cdot 1_{\max}=4[\mathrm{V}]$

また，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{1\times 10^{-2}}=2\pi\times 10^{2}$

$V_{0\max}=\omega L I_{\max}$ より，$L=\dfrac{V_{0\max}}{\omega I_{\max}}=\dfrac{10}{2\pi\times 10^{2}\times 4}=\dfrac{1}{8\pi}\times 10^{-1}\,[\mathrm{H}]$

(5)

LCR 直列回路と共振周波数

LCR 直列回路を流れる電流 I を $I=I_{\max}\sin\omega t$ とし，

このとき，交流電源の起電力 V が $V=V_{\max}\sin(\omega t+\varphi)$ であるとする。

ここで $V_{\max}$ を一定に保ち，角振動数 ω だけを変えていくと，

ある角振動数 ω_0 において回路のインピーダンス，つまり交流回路の抵抗が最小となり，

その結果，最大の電流が回路を流れることになる。

この現象を直列共振，また，角振動数 ω_0 を与える周波数を共振周波数という。

（共振周波数を f_0 とすると，$\omega_0=2\pi f_0$）

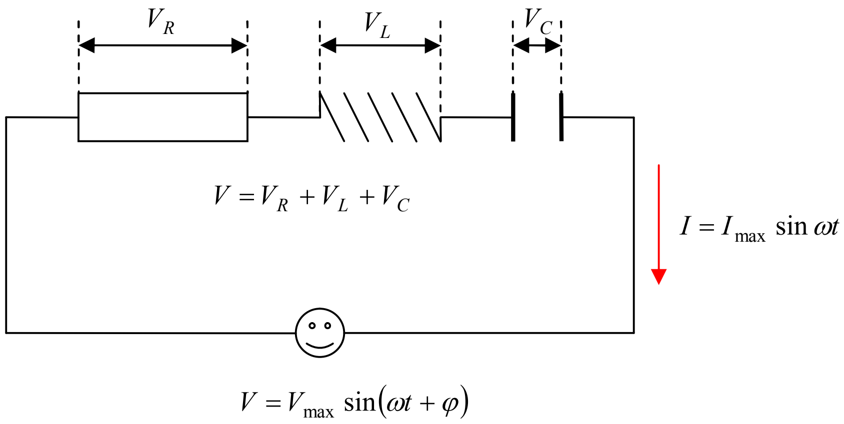
共振周波数を求める

コイルの電圧を V_L，コンデンサーの電圧を V_C，オーム抵抗の電圧を V_R，

電流を $I=I_{\max}\sin\omega t$，交流電源の起電力を $V=V_{\max}\sin(\omega t+\varphi)$（$V_{\max}$ は一定）とする。

キルヒホッフの第二法則より，

$$
\begin{aligned}
V_{\max}\sin(\omega t+\varphi)&=V_R+V_L+V_C\\
&=RI_{\max}\sin\omega t+\omega L I_{\max}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{I_{\max}}{\omega C}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\\
&=I_{\max}\left\{R\sin\omega t+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t\right\}\\
&=I_{\max}\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t+\varphi)
\end{aligned}
$$

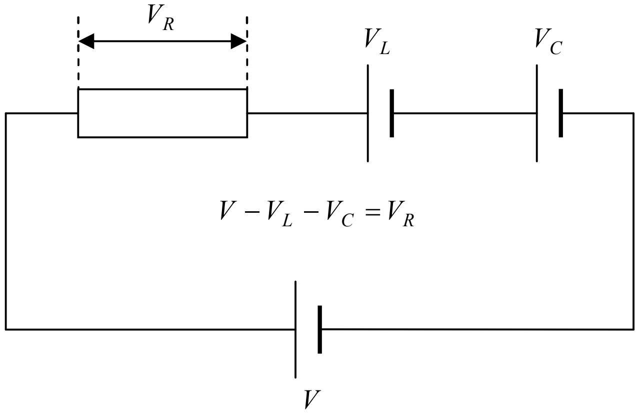


補足図

コイルとコンデンサーをそれぞれ起電力V_LとV_Cの電池に例えると，

電源の起電力の向きと逆向きだから，

キルヒホッフの第二法則より，$V - V_L - V_C = V_R$　$\therefore V = V_R + V_L + V_C$



よって，

$$V_{\max} = I_{\max}\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,\omega}$$

また，$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ は回路の抵抗にあたり，これをインピーダンスという。

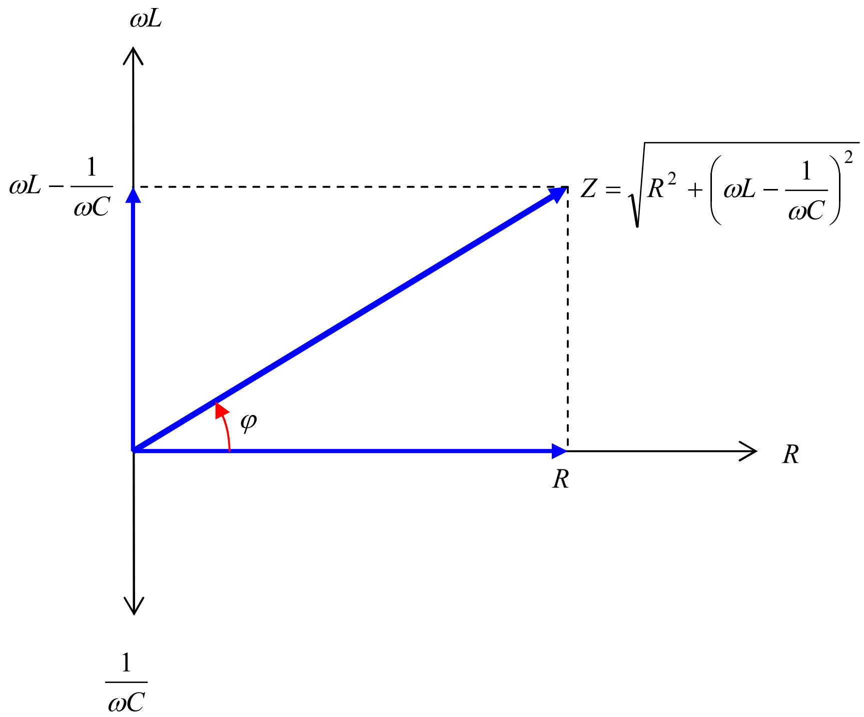
インピーダンスは記号Zを使って表すので，$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ となる。

ここで，

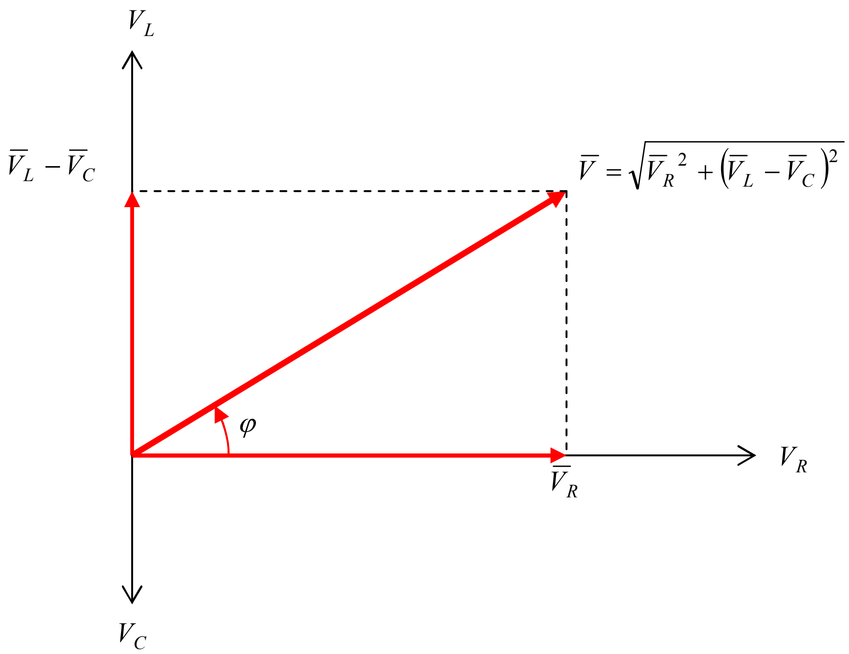
V_Rの位相を横軸にとると，V_Lの位相はV_Rより$\frac{\pi}{2}$進み，V_Cの位相は$\frac{\pi}{2}$遅れるから，

インピーダンスZ，オーム抵抗R，誘導リアクタンスωL，容量リアクタンス$\frac{1}{\omega C}$の

関係は次のように図示することができる。



また，起電力と電圧の実効値を $\overline{V}$，$\overline{V}_L$，$\overline{V}_C$，$\overline{V}_R$ とすると，下図のようになる。



ここで$V_{\max}$は一定という条件の下，$I_{\max}$が最大値をとるのは，

$V_{\max}=I_{\max}\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ より，

$\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ が最小値をとるとき，すなわち $\omega L-\dfrac{1}{\omega C}=0$ になるときである。

このときの角振動数をω_0とすると，$\omega_0 L-\dfrac{1}{\omega_0 C}=0$ より，$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

よって，共振周波数をf_0とすると，$f_0=\dfrac{2\pi}{\sqrt{LC}}$

(6)

交流回路の抵抗での消費電力

$P_R=I_{\max}\sin\omega t\cdot V_{\max}\sin\omega t=I_{\max}V_{\max}\sin^2\omega t=\dfrac{I_{\max}V_{\max}}{2}(1-\cos 2\omega t)$ より，

抵抗での消費電力の時間平均を$\overline{P}_R$とすると，$\cos 2\omega t$ の時間平均は 0 だから，

$\overline{P}_R=\dfrac{I_{\max}V_{\max}}{2}$

また，$\overline{P}_R=\dfrac{I_{\max}V_{\max}}{2}=\dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$ より，

$\overline{P}_R$は電流の実効値$\dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$と電圧の実効値$\dfrac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$の積である。

交流回路のコイルでの消費電力

$P_L=I_{\max}\sin\omega t\cdot V_{\max}\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)=I_{\max}V_{\max}\sin\omega t\cos\omega t=\dfrac{I_{\max}V_{\max}}{2}\cdot\sin 2\omega t$

コイルでの消費電力の時間平均を$\overline{P}_L$とすると，$\sin 2\omega t$ の時間平均は 0 だから，$\overline{P}_L=0$

よって，コイルでの消費電力の時間平均は 0 である。

これはコイルに入る電流が増加すると，それが磁気エネルギーとなり，

減少するとき磁気エネルギーが電流となって回路に還元されることによる。

交流回路のコンデンサーでの消費電力

$P_C=I_{\max}\sin\omega t\cdot V_{\max}\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)=-I_{\max}V_{\max}\sin\omega t\cos\omega t=-\dfrac{I_{\max}V_{\max}}{2}\cdot\sin 2\omega t$

コイルでの消費電力の時間平均を$\overline{P}_C$とすると，$\sin 2\omega t$ の時間平均は 0 だから，$\overline{P}_C=0$

よって，コンデンサーでの消費電力の時間平均は 0 である。

これはコンデンサーに入る電流が増加すると，それが静電エネルギーとなり，

減少するとき電流となって回路に還元されることによる。