7. 斜面への斜方投射

(4)

斜面に垂直に衝突する直前の速さを求める。

斜面に垂直に衝突する直前の $v_x=0$ より，

$$v_x=v_0\cos\alpha_2-g\sin\theta\cdot t=0$$

$$\therefore t=\frac{v_0\cos\alpha_2}{g\sin\theta}$$

$$\begin{aligned}v_y&=v_0\sin\alpha_2-g\cos\theta\cdot t\\&=v_0\sin\alpha_2-g\cos\theta\cdot\frac{v_0\cos\alpha_2}{g\sin\theta}\\&=v_0\sin\alpha_2-\frac{v_0\cos\alpha_2}{\tan\theta}\end{aligned}$$

ここで，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ より，$\tan\theta=1$

$\tan\alpha_2=\dfrac{1}{2}$ と三角比より，$\sin\alpha_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha_2=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって，

$$v_y=v_0\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-v_0\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{v_0}{\sqrt{5}}$$

斜面に衝突する直前の速さを v_1 とすると，

$$v_1=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{0+\left(-\frac{v_0}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{v_0}{\sqrt{5}}$$

はねかえった直後の速さを求める。

はねかえった直後の速さを v_2 とすると，条件より，

$$v_2=\frac{v_1}{2}=\frac{v_0}{2\sqrt{5}}$$

1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの時間を(1)で求めた式を使って求める。

(1)で得られた衝突するまでの時間の式 $\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\theta}$ について，

v_0 は初速度の大きさだから，v_0 に v_2 を，

α は斜面に対する打ち上げ角度であり，垂直にはねかえるから α に $\dfrac{\pi}{2}$ を，

θ は斜面の傾斜角だから，θ に $\dfrac{\pi}{4}$ をそれぞれ代入すればよい。

よって，求める時間は，$\dfrac{2\cdot\dfrac{v_0}{2\sqrt{5}}\sin\dfrac{\pi}{2}}{g\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}v_0}{5g}$

(5)

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot t^2\\
&=\frac{1}{2}g\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{10}v_0}{5g}\right)^2\\
&=\frac{\sqrt{2}g}{4}\cdot\frac{10{v_0}^2}{25g^2}\\
&=\frac{\sqrt{2}{v_0}^2}{10g}
\end{aligned}
$$

あるいは，

(2)の式を使うと，$\dfrac{2{v_2}^2\sin\dfrac{\pi}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\right)}{g\cos^2\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\dfrac{{v_0}^2}{10}\cdot1\cdot\left(-\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{\dfrac{g}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}{v_0}^2}{10g}$

値が負だから，B は斜面にそって A の下方 $\dfrac{\sqrt{2}{v_0}^2}{10g}$ の位置にある。