27. ばねに接続された物体の運動と力学的エネルギー

$\boxed{ク}$

物体 1 の運動方程式：$m_1 a = T - kx$ ・・・①

物体 2 の運動方程式：$m_2 a = m_2 g - T$ ・・・②

①，②より，

$(m_1 + m_2)a = m_2 g - kx$

よって，

物体 1 と物体 2 全体の運動方程式は，

$$(m_1 + m_2)a = -k\left(x - \frac{m_2 g}{k}\right)$$

あるいは，

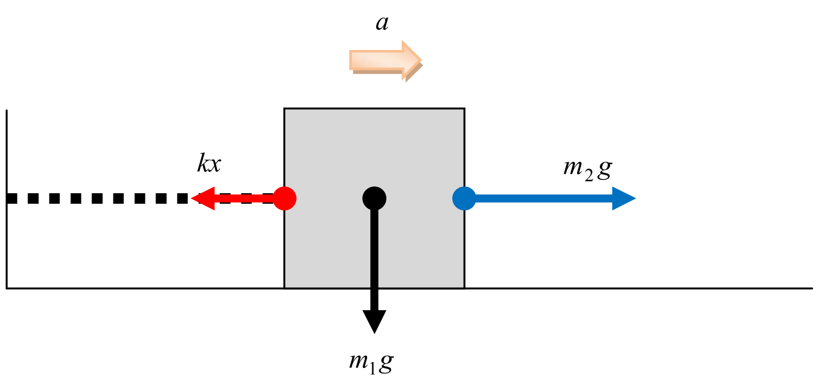
物体 1 と物体 2 を一体とみなすと，張力 T は内力になってしまう。

よって，この場合の外力は，kx と $m_2 g$ となる。

ゆえに，

$(m_1 + m_2)a = m_2 g - kx$

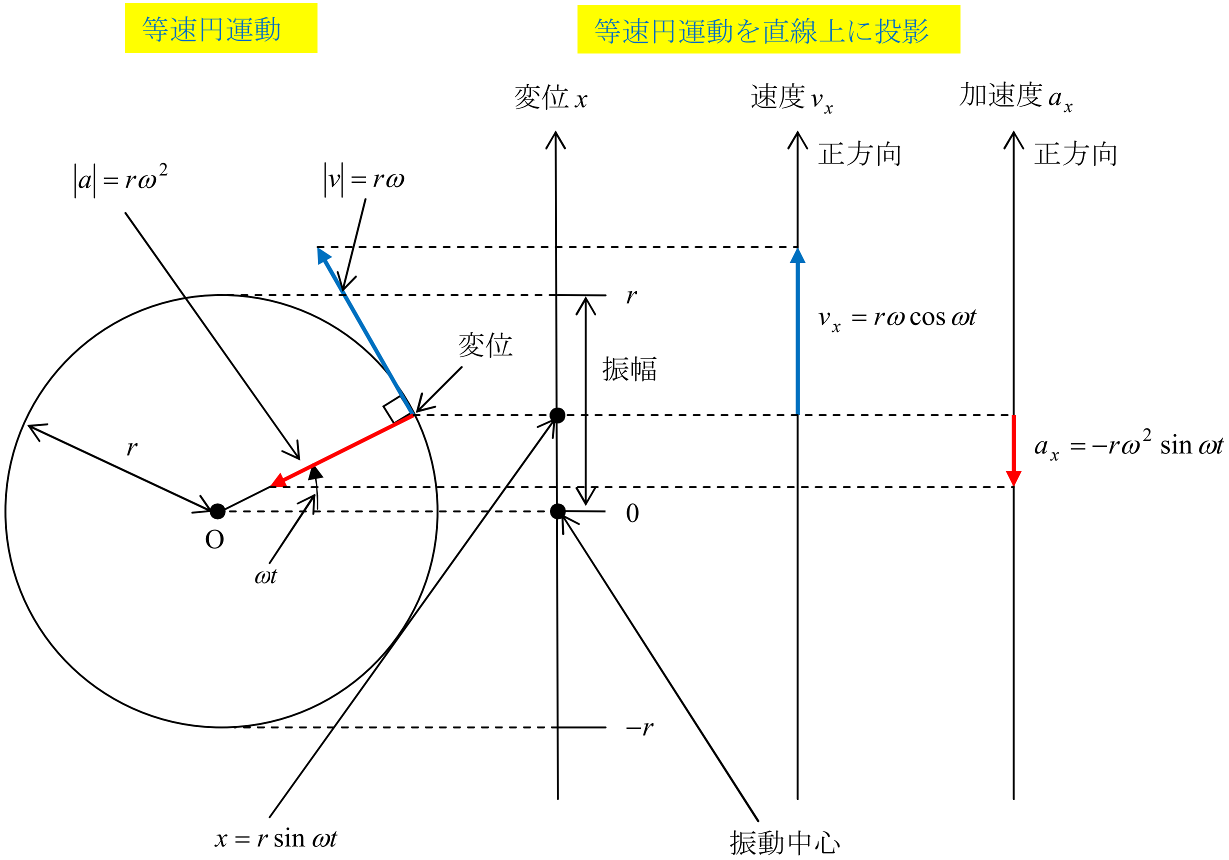
$$\therefore (m_1 + m_2)a = -k\left(x - \frac{m_2 g}{k}\right)$$



運動方程式$(m_1+m_2)a=-k\left(x-\frac{m_2g}{k}\right)$の右辺$-k\left(x-\frac{m_2g}{k}\right)$は$x$の関数だから，
この運動方程式は，単振動の運動方程式である。
単振動の振動中心では，物体に働く力がつりあうから，
振動中心では，$-k\left(x-\frac{m_2g}{k}\right)=0$
よって，振動中心の位置$x=\frac{m_2g}{k}$
振幅は振動開始点と振動中心の間の距離であり，振動開始点は$x=0$だから，
振幅は$\frac{m_2g}{k}$
ここで，単振動の式処理を楽にする目的で，
$X=x-\frac{m_2g}{k}$とおくと，
$(m_1+m_2)a=-kX$
$\therefore a=-\frac{k}{m_1+m_2}X$　・・・③
一方，
単振動の角振動数をωとすると，
$a=-\omega^2X$　・・・④
と表せるから，
③，④より，
$\omega^2=\frac{k}{m_1+m_2}$
$\therefore \omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$
単振動の周期をTとすると，$\omega=\frac{2\pi}{T}$より，
$\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$
ゆえに，
$T=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$

等速円運動と単振動

単振動は等速円運動をしている質点の運動を直線上に投影した運動とみなせる。



等速円運動を直線上に投影すると，

変位： $x = r\sin\omega t$

初期位相（等速円運動開始時の角度）が α ならば， $x = r\sin(\omega t + \alpha)$

速度： $v_x = r\omega\cos\omega t$

初期位相（等速円運動開始時の角度）が α ならば， $v = r\omega\cos(\omega t + \alpha)$

加速度： $a_x = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$

初期位相（等速円運動開始時の角度）が α ならば， $a = -r\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$

以上が，単振動の変位，速度，加速度である。

補足

三角関数の微分を学習済みなら，

$x = r\sin\omega t$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\sin\omega t) = r\omega\cos\omega t$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega\cos\omega t) = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x$$