

52. あらい面上で振動する物体の運動

テーマ：非保存力と単振動

(カ)

別解

物体 A の振動中心からの変位を X とすると、物体 A に働く外力 $F = -kX$ であり、これは一種の弾性力とみなせる。また、 $F = -kX$ に非保存力の動摩擦力も含まれているので、その弾性エネルギー $\frac{1}{2}kX^2$ は非保存力も含んだものである。

したがって、振動中心を基準にすると、非保存力の有無にかかわらず、

次の力学的エネルギー保存則が成り立つ。(詳しくは、p3 からの解説参照のこと)

$$\frac{1}{2}kX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$$

 $x = 5l$ のとき、速さ 0, $X = 5l - l = 4l$, $x = l$, すなわち振動中心 $X = 0$ での速さを v とすると、力学的エネルギー保存則より、

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(4l)^2 + 0 \quad \therefore v = 4l\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots \text{(答)}$$

(キ)

周期 T の求め方単振動の周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ は、

「運動方程式からの物体 A の加速度 = 単振動を表す三角関数の式からの物体 A の加速度」から求めることができる。

物体 A の単振動運動方程式からの加速度

PQ 間の物体 A に働く外力の和は $-kx + \mu' mg = -kx + kl = -k(x - l)$ だから、物体 A の加速度を a とすると、物体 A の運動方程式は $ma = -k(x - l)$ ここで、 $x - l = X$ とおくと、 $ma = -kX$ となり、

物体 A の運動が単振動運動であることが明確になる。

$$\therefore a = -\frac{k}{m}X \quad \dots \text{①}$$

物体 A の単振動を表す三角関数式からの加速度

振幅を求める必要はないが、より正確な式にする目的で、それも求めてみると、

単振動の振幅 $= 5l - l = 4l$ 初期位相を α とすると、 $X = 4l \sin(\omega t + \alpha)$

$$t=0 \text{ のとき } X=4l \text{ より, } \sin \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$$

よって,

$$X = 4l \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 4l \cos \omega t$$

$$v = \frac{dX}{dt} = -4l\omega \sin \omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -4l\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 X \quad \dots \textcircled{2}$$

周期 T

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } -\omega^2 X = -\frac{k}{m} X$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

非保存力がはたらく場合の単振動の力学的エネルギー保存

物理小ネタ「単振動・単振動の力学的エネルギー保存則」より抜粋

1. 非保存力が作用しても単振動運動は続く

単振動の原動力は、物体に働く保存力のつり合いの位置からの変位を x としたとき、物体に働く保存力の和が $F_0 = -Kx$ となる力である。

保存力しか働いていないから、これを単振動の保存力としてよい。

質量 m の質点が単振動の保存力 $F_0 = -Kx$ をうけて、

運動方程式 $ma = -Kx$ の単振動運動をしているとする。

ここに、質点の単振動の向きに非保存力 f を働かせると、

質点が受ける外力の和 $F = F_0 + f = -Kx + f = -K\left(x - \frac{f}{K}\right)$ となる。

ここで、 $X = x - \frac{f}{K}$ とおけば、質点の運動方程式 $ma = -KX$ が得られる。

これは、 $X = 0$ を振動中心とする質量 m の質点の単振動の運動方程式である。

よって、

保存力を受けて単振動運動をしている質点に非保存力が働いても、

振動中心が $x = 0$ から $x = \frac{f}{K}$ $\left(\because x - \frac{f}{K} = 0\right)$ に移動し、

また、振動中心の移動により振幅の大きさも変わるが、

質点の単振動運動そのものは継続する。

これは、非保存力が働いている単振動運動も存在することを示している。

補足

非保存力が動摩擦力のとき（向きが周期的に変化する非保存力のとき）

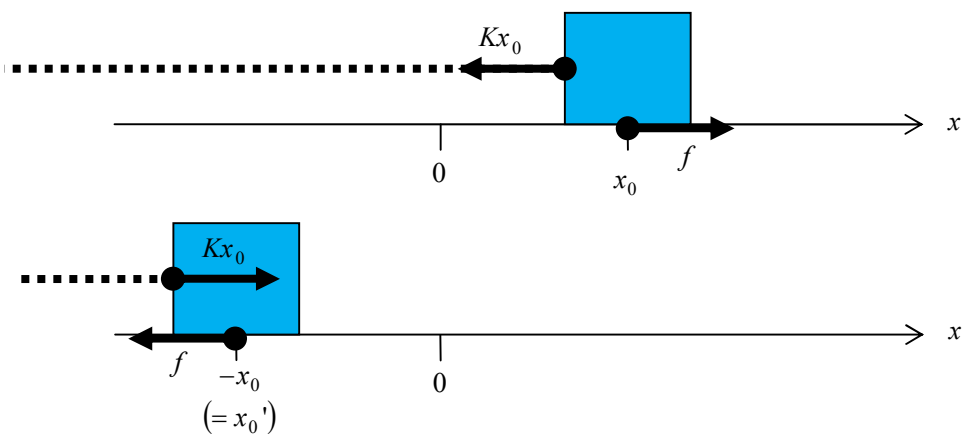
ばね定数 K のばねにつながれた質量 m の物体が、
 動摩擦力 f を受けながら単振動運動する場合を考えてみよう。
 尚、ばねの自然長の位置を $x=0$ とする。

補足1. 振動中心は2つある

$x > 0$ のとき $F_0 = -Kx < 0$ より、動摩擦力 $f > 0$ \therefore 振動中心 $x_0 = \frac{f}{K} > 0$

$x < 0$ のとき $F_0 = -Kx > 0$ より、動摩擦力 $f < 0$ \therefore 振動中心 $x_0' = \frac{f}{K} < 0$

また、単振動の周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ より、振動中心が入れ替わる周期 $= \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{K}}$



補足2. 振動中心が入れ替わるたびに振幅が小さくなっていき、質点はやがて静止する。

x 正方向に $x = x_{\max} > x_0$ まで質点が移動したとすると、

$x = x_0$ を振動中心とする単振動だから、

$$\text{振幅 } A_1 = x_{\max} - x_0 \quad \dots \textcircled{8}$$

よって、負方向には、 $x = x_0 - (x_{\max} - x_0) = 2x_0 - x_{\max}$ の位置まで移動する。

次に、 $2x_0 - x_{\max} < x_0'$ とすると、

今度は、 $x = x_0'$ を振動中心とする単振動になる。

よって、

$$\begin{aligned} \text{振幅 } A_2 &= x_0' - (2x_0 - x_{\max}) \\ &= x_0' - 2x_0 + x_{\max} \\ &= -x_0 - 2x_0 + x_{\max} \\ &= x_{\max} - 3x_0 \quad \dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

⑧, ⑨より、 $A_1 > A_2$

こうして、時間 $\frac{T}{2}$ ごとに振幅が $2x_0$ ずつ小さくなっていく。

すなわち振動が減衰していく。

やがて、振幅が最大となる位置で質点が静止したときに、

$$|F| = \left| -K \left(x_n - \frac{f}{K} \right) \right| < \text{最大摩擦力 } \mu mg \text{ となれば、単振動運動が終了する。}$$

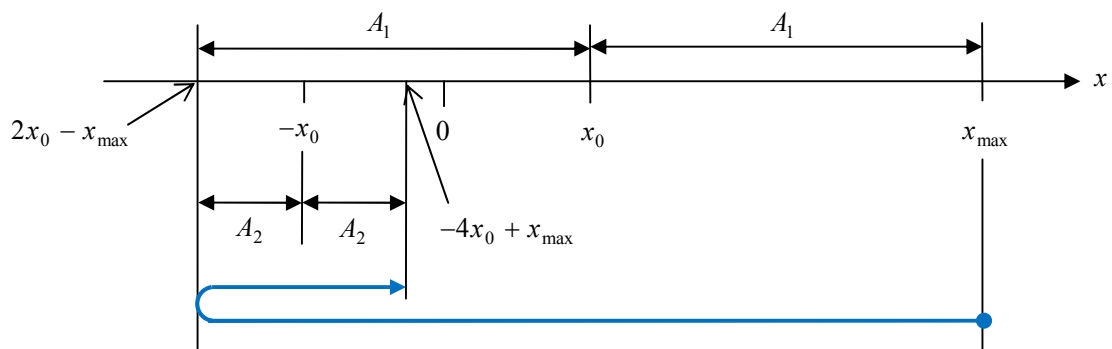
例

質点を下図 x_{\max} で放すと、 $x = -4x_0 + x_m$ で質点は静止する。

$$|k(-4x_0 + x_{\max})| < kx_0 = |f|$$

動摩擦力 f の大きさは最大摩擦力 μmg より小さいから、

質点は $x = -4x_0 + x_m$ で完全に静止する。



2. 非保存力が働いている単振動運動の力学的エネルギーも保存される。

単振動の保存力 $F_0 = -Kx$ (x は物体に働く保存力のつり合いの位置からの変位) と一定の非保存力 f を受けている単振動運動においても、その力学的エネルギーが保存されることを確かめてみよう。

確認

質点の位置が同一直線上を x_1 から x_2 へ変化したときを考える。

力学的エネルギーと非保存力による仕事の関係

「位置 x_1 の力学的エネルギー + 非保存力 f の仕事 = 位置 x_2 の力学的エネルギー」

について、

- ・位置 x_1, x_2 の運動エネルギーを、それぞれ $\frac{1}{2}mv_1^2, \frac{1}{2}mv_2^2$ とする。
- ・位置 x_1, x_2 の保存力の位置エネルギーは、それぞれ $\frac{1}{2}Kx_1^2, \frac{1}{2}Kx_2^2$ である。

より、

$$\frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + f(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}Kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

ここで、この単振動の運動方程式 $ma = -K\left(x - \frac{f}{K}\right) = -KX$ より、

$$X_1 = x_1 - \frac{f}{K}, \quad X_2 = x_2 - \frac{f}{K} \text{ とおくと, } x_1 = X_1 + \frac{f}{K}, \quad x_2 = X_2 + \frac{f}{K} \text{ だから,}$$

$$\frac{1}{2}K\left(X_1 + \frac{f}{K}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + f\left\{\left(X_2 + \frac{f}{K}\right) - \left(X_1 + \frac{f}{K}\right)\right\} = \frac{1}{2}K\left(X_2 + \frac{f}{K}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\frac{1}{2}KX_1^2 + X_1f + \frac{f^2}{2K} + \frac{1}{2}mv_1^2 + fX_2 - fX_1 = \frac{1}{2}KX_2^2 + X_2f + \frac{f^2}{2K} + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\frac{1}{2}KX_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}KX_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

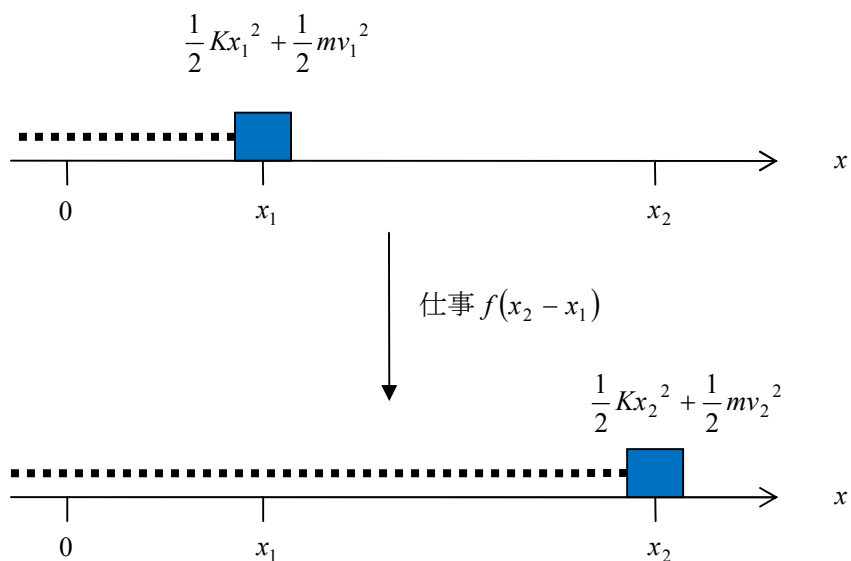
$$\text{よって, } \frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$$

同様に、逆方向の質点の移動についても、 $\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$

これは、非保存力が働いている単振動運動であっても、単振動運動の力学的エネルギー保存の法則

$$\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$$

が成り立つことを示している。



これは、 $F = -KX$ は非保存力も含めた弾性体とみなせるからである。

つまり、弾性力の $\frac{1}{2}KX^2$ を弾性力の位置エネルギー（弾性エネルギー）と見なせば、

弾性力の力学的エネルギー保存の法則

$$\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$$

が成り立ち、その中に非保存力も含まれてしまうからである。

単振動をあまり難しく考えず、

「ばね定数はそのまま、自然長の位置が変化しただけのばねにつけられた物体の運動」と高を括るぐらいがいいでしょう。