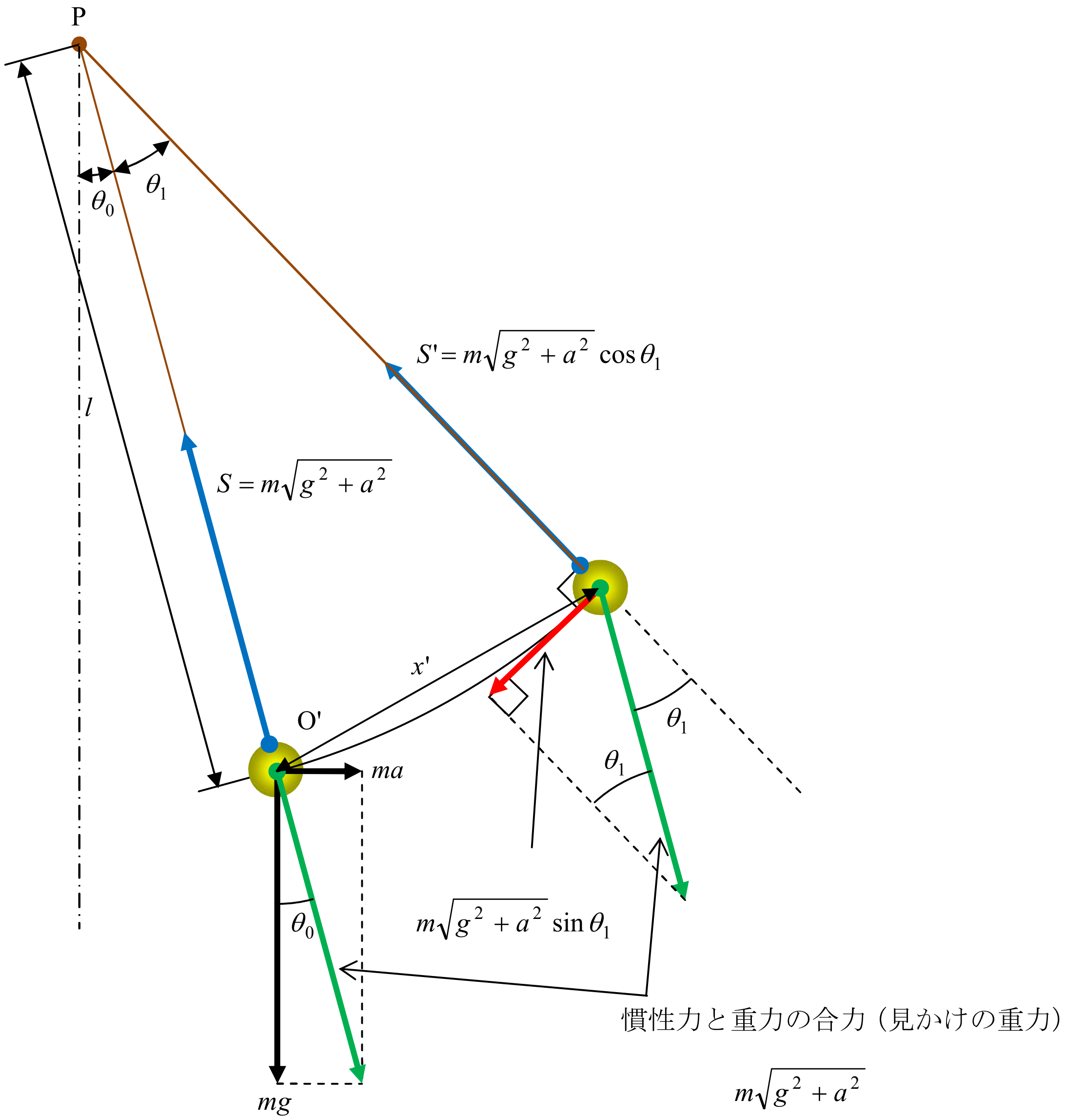
55. 単振り子

$\boxed{5}$



張力 $S' = m\sqrt{g^2+a^2}\cos\theta_1$ は，単振動の軌道と常に垂直なので，復元力ではない。

復元力は，慣性力と重力の合力の単振動の軌道成分 $m\sqrt{g^2+a^2}\sin\theta_1$ である。

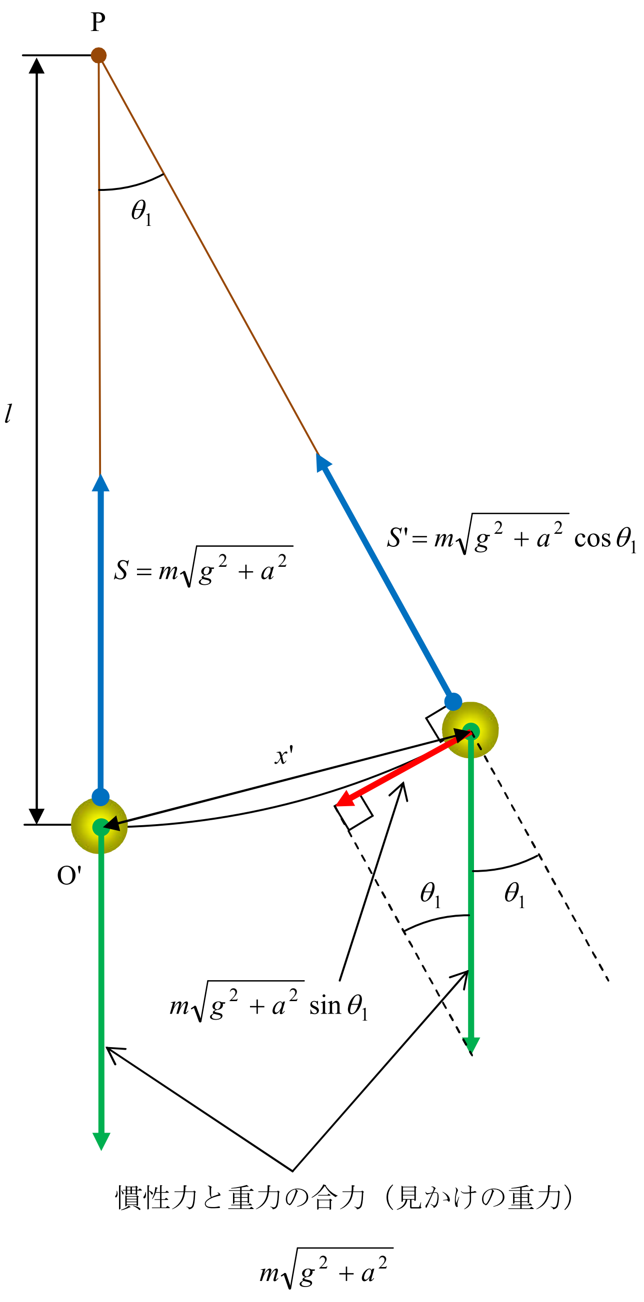
ここで，小球 Q を小さく振動させたとあるから，θ_1 は十分小さいと見なしてよい。

さらに，θ_1 は十分小さいと $\sin\theta_1 = \dfrac{x'}{l}$ としてよいので，

復元力の大きさは，$m\sqrt{g^2+a^2}\sin\theta_1 = \dfrac{m\sqrt{g^2+a^2}}{l}\cdot x'$　・・・(答)

補足

P を軸に時計回りに θ_0 回転させ，O' が P の真下になるようにするとわかりやすい。



$\boxed{7}$ $\boxed{8}$

図のように固定した xy 軸をとる。

糸が切れた瞬間，小球 Q は糸の束縛力から解放され，重力 g だけを受ける。

よって，Q の加速度を xy 成分で表示すると $\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

一方，床の加速度の xy 成分は $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

したがって，床から見た小球 Q の加速度の xy 成分は $\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -g \end{pmatrix}$ である。

糸を切ってから床上に落ちるまでの時間

床から見た小球 Q の変位の y 成分は $-h$ だから，求める時間を t とすると，

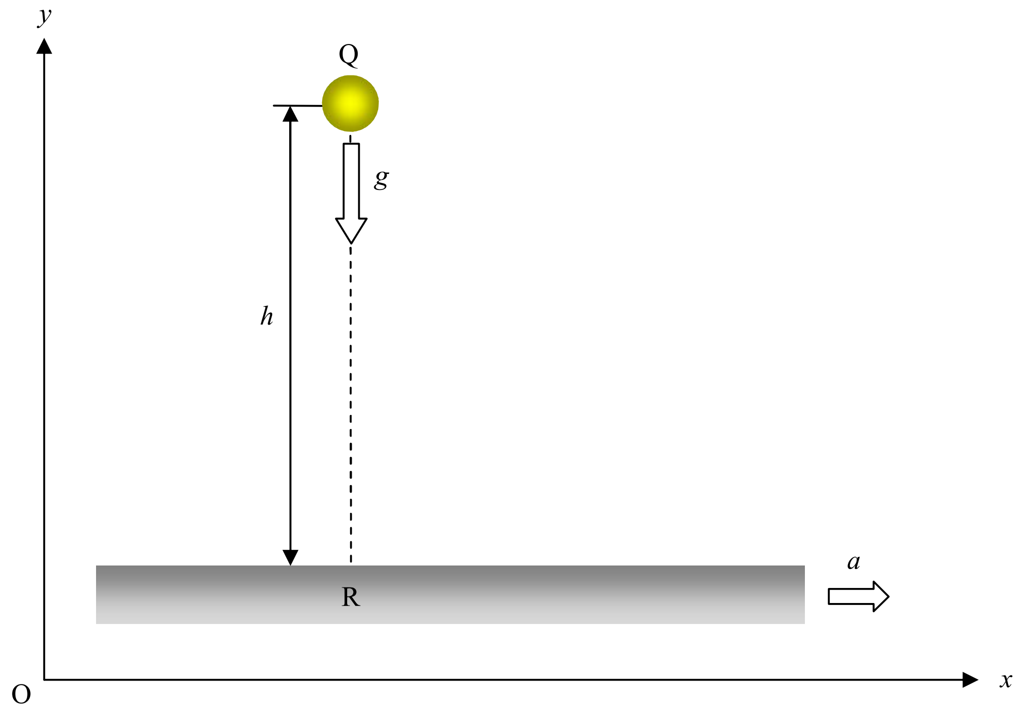
$$-h = \frac{1}{2}\cdot(-g)\cdot t^2 \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \cdots (答 \boxed{7})$$

落下地点

床から見た小球 Q の加速度の x 成分は $-a$ だから，

床から見た小球 Q の変位の x 成分 $\Delta x = \frac{1}{2}\cdot(-a)\cdot t^2 = -\frac{1}{2}a\cdot\frac{2h}{g} = -\frac{ah}{g}$

よって，R から負の方向に $\frac{ah}{g}$ 離れた床上に落ちた。 ・・・(答 $\boxed{8}$)



単振り子の運動方程式と単振動の式

まずは，用語の定義から

単振り子

軽い糸の上端を固定して下端におもりをつるし，これを鉛直面内で振動させるもの

振り子

定点のまわりに振動する物体

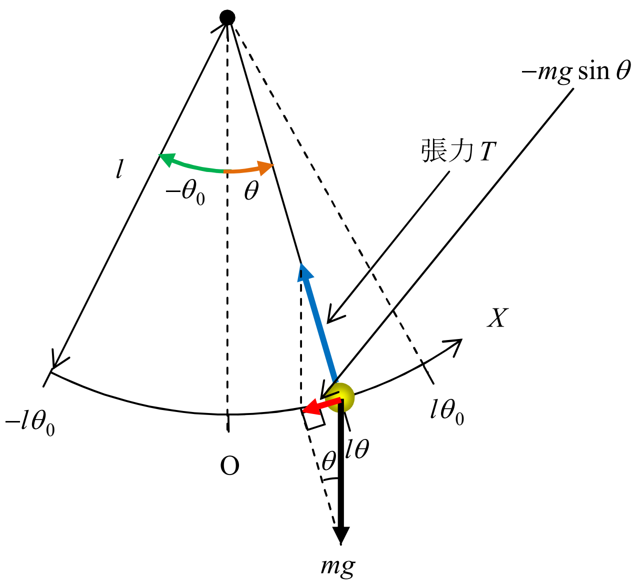
では，本題

質量 m の振り子に働く外力のつり合いの位置を原点 O とし，

振り子の軌道（円弧）の反時計まわりの向きを X 軸とする。

また，振り子の振幅の大きさを $l\theta_0$ とし， θ_0 は十分小さいものとする $(\theta_0 \approx 0)$。

ただし，図は，見やすくするため θ_0 をわざと大きくとった。



振り子の運動方程式

振り子は軌道（円弧）の接線方向の外力を受けて単振動をする。

糸の張力 T の円弧の接線方向の分力は 0 だから，

張力 T は振り子の運動方程式に含まれない。

よって，振り子の単振動運動の原動力となる外力は，

重力の円弧の接線成分 $-mg\sin\theta$ である。

よって，振り子の単振動の運動方程式は，

$ma=-mg\sin\theta$

ここで，$|\theta|<\theta_0\approx 0$ だから，$\sin\theta=\theta$ としてよい。

よって，$ma=-mg\theta$　・・・④

また，振り子の変位 $X=l\theta$　・・・⑤

④，⑤より，$ma=-mg\cdot\dfrac{X}{l}$　・・・⑥

$\therefore ma=-\dfrac{mg}{l}X$

$\dfrac{mg}{l}$ は定数だから，運動方程式⑥は単振動を表している。

単振動の式

振り子の振幅の大きさは $l\theta_0$ であり，初期位相を α，角振動数を $\omega\ (>0)$ とすると，

$X=l\theta_0\sin(\omega t+\alpha)$

振り子の速度 $v=\dfrac{dX}{dt}=l\theta_0\omega\cos(\omega t+\alpha)$

振り子の加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}=-l\theta_0\omega^2\sin(\omega t+\alpha)=-\omega^2X$　・・・⑦

単振動の式と単振動の運動方程式との融合

⑥より，$a=-\dfrac{g}{l}X$ これと⑦より，

$-\omega^2X=-\dfrac{g}{l}X$　$\therefore\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$　$\therefore T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

以上より，単振り子は振幅 $l\theta_0$，周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ の単振動運動を行う。

補足

⑥について，単振動の運動方程式の一般形 $ma=-KX$ より，$K=\dfrac{mg}{l}$

これを公式 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ に代入すると，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ が得られる。