56. 浮力と単振動

(1)，(2)

(1)は単振動の振動中心を(2)はその周期を求めさせる問題だから，

単振動の運動方程式を立ててから，それらをまとめて求めることにする。

単振動の運動方程式

液面を基準に鉛直下向きに x 軸をとり，木片 A の質量はとりあえず m とおき，

木片 A の底面の液面下の位置を x，木片の加速度を a とし，木片の運動方程式を立てると，

$$ma = mg - \rho Sgx$$

さらに，この式が単振動運動であることを明確に表すように変形すると，

$$ma = -\rho Sg\left(x - \frac{m}{\rho S}\right)$$

これを単振動の運動方程式 $ma = -KX$ と対応させると，

$$\rho Sg = K\,,\quad X = x - \frac{m}{\rho S}$$

振動中心では，$X = 0$ より，$x_0 - \dfrac{m}{\rho S} = 0$

$$\therefore x_0 = \frac{m}{\rho S} = \frac{\frac{\rho}{4}Sl}{\rho S} = \frac{l}{4}$$ ・・・**(1)の答**

また，単振動の周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{\rho}{4}Sl}{\rho Sg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{4g}} = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ・・・**(2)の答**

補足

単振動の周期 T をきっちりと求めると，

運動方程式 $ma = -KX$ で表される単振動を表す式は，

振幅を A，角振動数を $\omega\ (>0)$，初期位相を α とすると，

$$X = A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$v = \frac{dX}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \cdot A\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 X$$

一方，$ma = -KX$ より，$a = -\dfrac{K}{m}$

よって，$-\omega^2 X = -\dfrac{K}{m}X$

$\therefore \omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \quad (\because \omega > 0)$

角振動数とは，周期Tを位相2πと対応させたときの，位相の変化速度のことだから，

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$\therefore T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{\rho}{4}Sl}{\rho Sg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{4g}} = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ ・・・**(2)**の答

(3)

木片 A の質量はとりあえずmとおく。

$ma = -\rho Sg\left(x - \dfrac{m}{\rho S}\right)$，$\dfrac{m}{\rho S} = \dfrac{\frac{\rho}{4}Sl}{\rho S} = \dfrac{l}{4}$ より，

$ma = -\rho Sg\left(x - \dfrac{l}{4}\right)$

ここで，$\rho Sg = K$，$X = x - \dfrac{l}{4}$ とおくと，$ma = -KX$

単振動運動の力学的エネルギーは保存されるから，

$\dfrac{1}{2}KX^2 + \dfrac{1}{2}mv^2 = $一定

木片 A の上面が水面と同じになるように押し下げたとき

$x = l$ より，$X = l - \dfrac{l}{4} = \dfrac{3}{4}l$，$v = 0$

木片 A が飛び出す瞬間

$x = 0$ より，$X = 0 - \dfrac{l}{4} = -\dfrac{l}{4}$

よって，

$\dfrac{1}{2}K\left(\dfrac{3}{4}l\right)^2 = \dfrac{1}{2}K\left(-\dfrac{l}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{2}mv^2$

$\therefore \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{4}Kl^2$ ・・・①

木片 A が飛び出してからの力学的エネルギー保存の法則より，

$\dfrac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgh$ ・・・②

①，②より，

$$\frac{1}{4}Kl^2 = mgh$$

$$\therefore h = \frac{Kl^2}{4mg} = \frac{\rho Sgl^2}{4\cdot\frac{\rho}{4}Slg} = l$$ ・・・(答)

あるいは，

非保存力（浮力）の仕事＝力学的エネルギー変化

運動エネルギー変化は，はなした瞬間の速度＝最高点の速度＝0 より，0

重力の位置エネルギーの基準を水面にとると， $mgh - mg(-l) = mg(h+l)$

よって，力学的エネルギー変化＝$mg(h+l)$ ・・・③

また，浮力と変位は同じ向きだから，

浮力の仕事＝$\left|\int_{-l}^{0} dW\right|\cos 0 = \left|\int_{-l}^{0} -\rho Sxgdx\right| = \frac{1}{2}\rho Sl^2 g$ ・・・④

③，④より，

$$mg(h+l) = \frac{1}{2}\rho Sl^2 g$$

$$\frac{\rho}{4}Slg(h+l) = \frac{1}{2}\rho Sl^2 g$$

$\therefore h = l$ ・・・(答)

(4)

単振動の運動方程式

液面を基準に鉛直下向きに x 軸をとり，木片 A の質量はとりあえず m とおき，

木片 A の底面の液面下の位置を x , 木片の加速度を a とし, 木片の運動方程式を立てると,

$$ma = mg - \rho Sgx - k\left(x - x_0\right)$$

さらに，この式が単振動運動であることを明確に表すように変形すると，

$$ma = -\left(\rho Sg + k\right)x + mg + kx_0 = -\left(\rho Sg + k\right)\left(x - \frac{mg + kx_0}{\rho Sg + k}\right)$$

これを単振動の運動方程式 $ma = -KX$ と対応させると，

$$\rho Sg + k = K\ ,\quad X = x - \frac{mg + kx_0}{\rho Sg + k}$$

よって，

周期 $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\dfrac{\rho}{4}Sl}{\rho Sg + k}} = \pi\sqrt{\dfrac{\rho Sl}{\rho Sg + k}}$　・・・(答)

補足

振動中心の $X = 0$ より，このときの木片 A の底面の液面下の位置 $x_0' = \dfrac{mg + kx_0}{\rho Sg + k}$