

58. ばねに連結された2物体

ばねに連結された2物体の相対運動方程式と換算質量

(2)

ばねの弾性力を f とすると,

$$A \text{ の運動方程式は, } m_A a_A = f \quad \dots \textcircled{1}$$

$$B \text{ の運動方程式は, } m_B a_B = -f \quad \dots \textcircled{2}$$

①+②より,

$$m_A a_A + m_B a_B = 0$$

$$\therefore m_A a_A t + m_B a_B t = 0$$

$$\therefore m_A v_A + m_B v_B = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

力学的エネルギーが保存されるから,

$$\frac{1}{2} k(L-l)^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$\therefore m_B k(L-l)^2 = m_A m_B v_A^2 + m_B^2 v_B^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

③より, $m_B^2 v_B^2 = m_A^2 v_A^2$ だから, これを④に代入して,

$$\begin{aligned} m_B k(L-l)^2 &= m_A m_B v_A^2 + m_A^2 v_A^2 \\ &= m_A (m_A + m_B) v_A^2 \end{aligned}$$

$$\therefore v_A = (L-l) \sqrt{\frac{km_B}{m_A(m_A + m_B)}} \quad (\because v_A > 0)$$

これと③より,

$$v_B = -(L-l) \sqrt{\frac{km_A}{m_B(m_A + m_B)}}$$

(3)

$$\text{重心の公式より, } x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

(4)

$$A \text{ の運動方程式は, } m_A a_A = kX \quad \dots \textcircled{5}$$

$$B \text{ の運動方程式は, } m_B a_B = -kX \quad \dots \textcircled{6}$$

(5)

$$\textcircled{5} \text{より } a_A = \frac{k}{m_A} X, \quad \textcircled{6} \text{より } a_B = -\frac{k}{m_B} X$$

$$\therefore a = a_B - a_A = -\frac{m_A + m_B}{m_A m_B} \cdot kX$$

$$\therefore \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} a = -kX$$

$$\text{よって, } M = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

単振動の運動方程式 $Ma = -kX$ より,

$$\text{周期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}}} = \sqrt{\frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}}$$

(ω のきちんとした求め方は物理小ネタ「単振動・単振動の力学的エネルギー保存則」参照)

(6)

$M = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ を換算質量という。

$Ma = -kX$ は、物体 A から見た物体 B の単振動の運動方程式を表している。

つまり、加速度 a は物体 A から見た物体 B の加速度、

また、この運動方程式の X は物体 A から見た物体 B のつり合いの位置（自然長）からの変位 $X = x_B - (x_A + l)$ を意味している。

換算質量 $M = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ は物体 A が観測する物体 B の質量である。

したがって、物体 A から見た物体 B の単振動運動ととらえ、 X を求めればよい。

物体 A から見た物体 B の単振動運動の振幅

物体 B が単振動開始した位置は、物体 A から見て $(x_A + L) - x_A = L$ の位置、

振動中心は、すなわちつり合いの位置は物体 A から見て $(x_A + l) - x_A = l$ の位置である。

よって、物体 A から見た物体 B の振幅は $L - l$

振幅は直感的にすぐ $L - l$ と出るが、あえて細かく相対的位置関係から求めた。

物体 A から見た物体 B の単振動運動の式

初期位相を α とすると,

$$X = (L-l)\sin(\omega t + \alpha), \text{ 物体 A から見た物体 B の速度 } v = \frac{dX}{dt} = (L-l)\omega \cos(\omega t + \alpha)$$

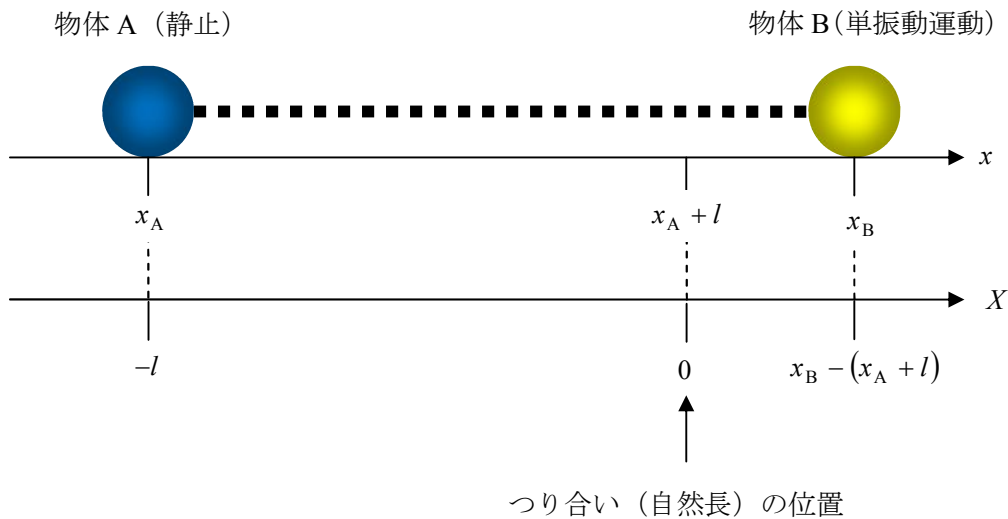
条件より, $t=0$ のとき, $X=0$, $v=-(L-l)\omega$ だから,

$$0 = (L-l)\sin \alpha, \quad -(L-l)\omega = (L-l)\omega \cos \alpha \quad \therefore \alpha = \pi$$

よって, 物体 A から見た物体 B の単振動の式は,

$$X = (L-l)\sin(\omega t + \pi)$$

$$\therefore X = -(L-l)\sin \omega t \quad \dots \text{ (答)}$$



$$X = x_B - x_A - l \text{ より, } x_B = X + x_A + l \quad \dots \text{ (7)}$$

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \text{ より,}$$

$$(m_A + m_B)x_G = m_A x_A + m_B x_B \quad \dots \text{ (8)}$$

(7), (8) より,

$$(m_A + m_B)x_G = m_A x_A + m_B (X + x_A + l)$$

$$(m_A + m_B)x_A = (m_A + m_B)x_G - m_B X - m_B l$$

$$x_A = x_G - \frac{m_B}{m_A + m_B} l - \frac{m_B}{m_A + m_B} X$$

$X = -(L-l)\sin \omega t$ を代入して,

$$x_A = x_G - \frac{m_B}{m_A + m_B} l + \frac{m_B}{m_A + m_B} (L-l)\sin \omega t \quad \dots \text{ (答)}$$

換算質量と作用反作用または内力による2物体の運動

ばねに連結された質量 m_A の質点Aと質量 m_B 質点Bが単振動運動しているとき、地上の観測者が、弾性力の大きさを $|f|$ 、それぞれの加速度を a_A 、 a_B として、それぞれの運動方程式を立てると、

$$m_A a_A = f \Leftrightarrow m_B a_B = -f$$

である。

よって、 $a_A = \frac{f}{m_A}$ 、 $a_B = -\frac{f}{m_B}$ となる。

では、質点Aから見た質点Bの運動方程式はどうなるかという、質点Aから見た質点Bの加速度は、

$$a_B - a_A = -\frac{f}{m_B} - \frac{f}{m_A} = -\frac{m_A + m_B}{m_A m_B} f$$

質点Aから見ても質点Bが外力 $-f$ を受けていることに変わらないから、質点Aから見た質点Bの運動方程式は、

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (a_B - a_A) = -f$$

となる。

つまり、質点Aから質点Bを見ると、

質量 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ の質点が外力 $-f$ を受けて加速度 $a_B - a_A$ の単振動運動している。

逆に、質点Bから質点Aを見ると、

$$a_A - a_B = \frac{f}{m_A} + \frac{f}{m_B} = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B} f \text{ より、}$$

質点Bから見た質点Aの運動方程式は、

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (a_A - a_B) = f$$

つまり、質点Bから質点Aを見ると、

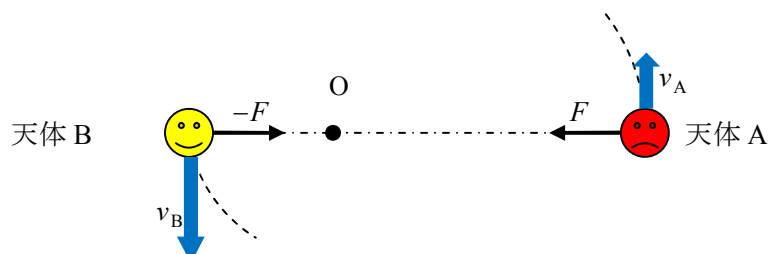
質量 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ の質点が外力 f を受けて加速度 $a_A - a_B$ で単振動運動している。

このように、2物体が作用反作用の関係の外力または内力によって運動しているとき、

相対運動の運動方程式を立てると現れる $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ のような質量を換算質量という。

例

万有引力で互いのまわりを回る 2 つの天体の運動



質量 m_A の天体 A と質量 m_B の天体 B が、
 重心 O を中心に互いのまわりを等速円運動しているものとする。
 向心力は万有引力であり、天体 A と天体 B の作用反作用の力であるから、
 天体 A が天体 B から受ける万有引力を F とすると、
 天体 B が天体 A から受ける万有引力は $-F$ である。
 天体 A, B の向心加速度をそれぞれ a_A , a_B とすると、
 天体 A の運動方程式は、 $m_A a_A = F$
 天体 B の運動方程式は、 $m_B a_B = -F$
 となる。

よって、

$$a_A = \frac{F}{m_A} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_B = -\frac{F}{m_B} \quad \dots \textcircled{2}$$

天体 B から見た天体 A の加速度は、

①-②より、

$$a_A - a_B = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B} F$$

天体 B から見ても天体 A に働く外力は万有引力 F だから、

天体 B から見た天体 A の運動方程式は、

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (a_A - a_B) = F \text{ となる。}$$

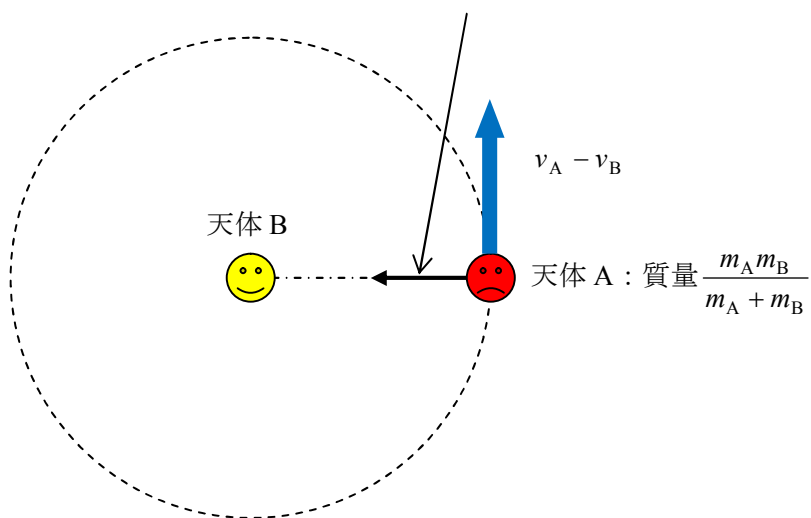
よって、

天体 B から見ると、質量 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ の天体 A が、天体 B からの万有引力 F を受けて、

天体 B のまわりを向心加速度 $a_A - a_B$ で等速円運動していることになる。

天体 B から見た天体 A の運動

$$\text{万有引力 } F = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (a_A - a_B)$$



補足

京大の力学は、
 重心の運動・重心から見た運動を含めた相対運動・相対運動と換算質量が頻出
 重心対策は京大の物理 25 年か「四訂前田の物理」上巻の重心の運動をテーマにした項
 「質量中心の運動」がいいでしょう。
 尚、「四訂前田の物理」(前田和貞著・代々木ライブラリー) は絶版なので、
 アマゾン等で入手してください。