59. 棚が落下しない条件

(1)

$\boxed{\text{エ}}$

別解：煩雑な計算を避け，手際よく解きたい場合

単振動の力学的エネルギー保存則

つり合いの位置からの距離を X とすると，$\dfrac{1}{2}KX^2+\dfrac{1}{2}mv^2=$一定

を利用して解く。

ばねの下端が棚板に初めて接触した瞬間の単振動の力学的エネルギー

単振動の位置エネルギー＝$\dfrac{1}{2}k(L-l)^2=\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{Mg}{k}\right)^2=\dfrac{(Mg)^2}{2k}$

運動エネルギーは（イ）より Mgh

よって，

$$\frac{(Mg)^2}{2k}+Mgh \quad ・・・①$$

ばねが最も縮んだ瞬間の単振動の力学的エネルギー

単振動の位置エネルギー＝$\dfrac{1}{2}(l-d)^2$，運動エネルギー＝0 より，$\dfrac{1}{2}k(l-d)^2$ ・・・②

単振動の力学的エネルギーが保存されるから，

①＝②より，$\dfrac{(Mg)^2}{2k}+Mgh=\dfrac{1}{2}k(l-d)^2$

$$\therefore (l-d)^2=\frac{2Mgh}{k}+\left(\frac{Mg}{k}\right)^2$$

$$\therefore l-d=\sqrt{\frac{2Mgh}{k}+\left(\frac{Mg}{k}\right)^2} \quad ・・・(答)$$

$\boxed{\text{カ}}$

単振動の振幅＝$l-d=\sqrt{\dfrac{2Mg}{k}\cdot\dfrac{Mg}{6k}+\left(\dfrac{Mg}{k}\right)^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Mg}{k}$

ばねの下端が棚板に初めて接触した時刻を $t=0$，周期を T，初期位相を α，
変位を y とし，ばねの長さが l より長い場合を $y>0$ とすると，

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{Mg}{k}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right)$$

$t=0$ のとき，すなわちばねの長さが自然長 L のとき，

$y=L-l=\dfrac{Mg}{k}$ より，$\dfrac{Mg}{k}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Mg}{k}\sin\alpha \quad \therefore \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これと y が減少することから，$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$

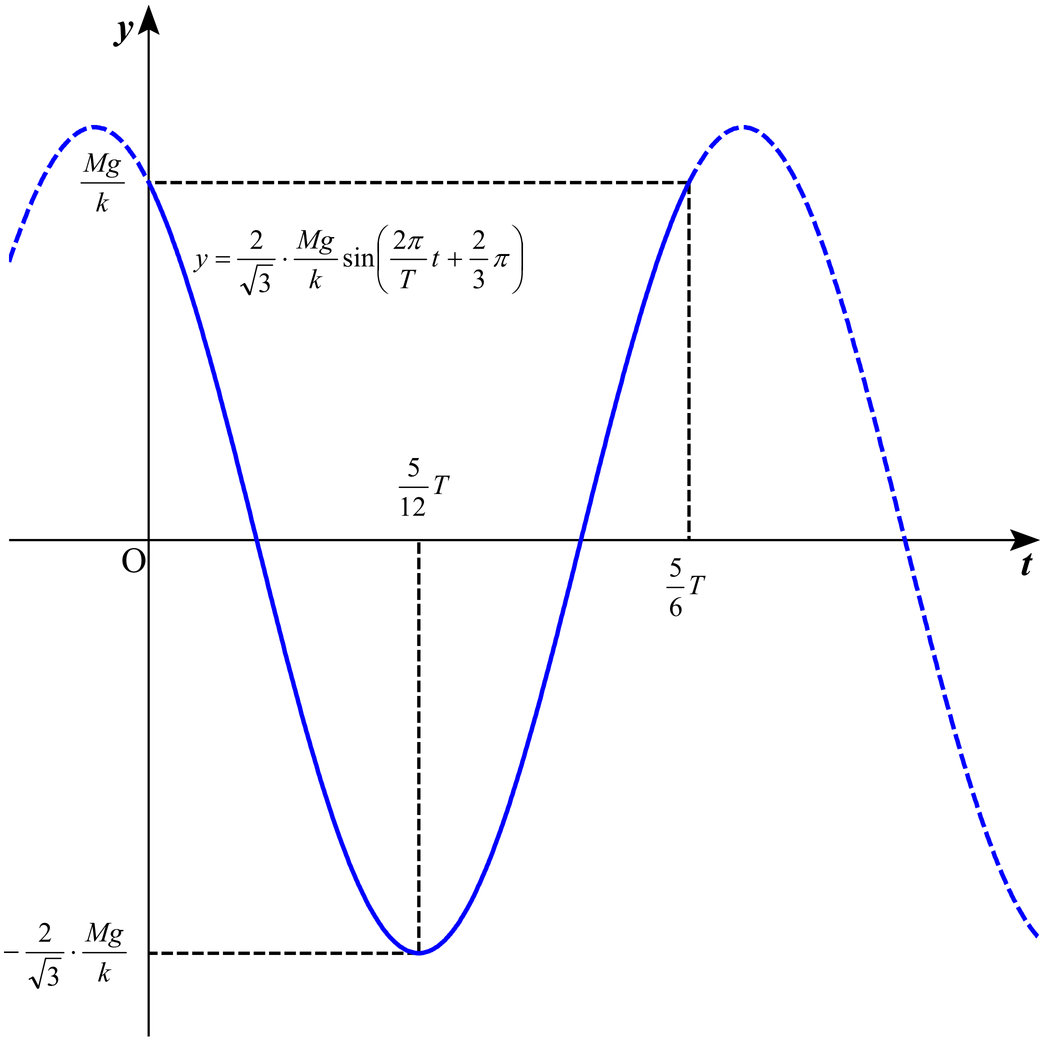
よって，$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{Mg}{k}\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

ばねが単振動をする時間は，自然長になった瞬間から再び自然長になるまでの時間，

すなわち $y=\dfrac{Mg}{k}$ になった瞬間から再び $y=\dfrac{Mg}{k}$ になるまでの時間だから，

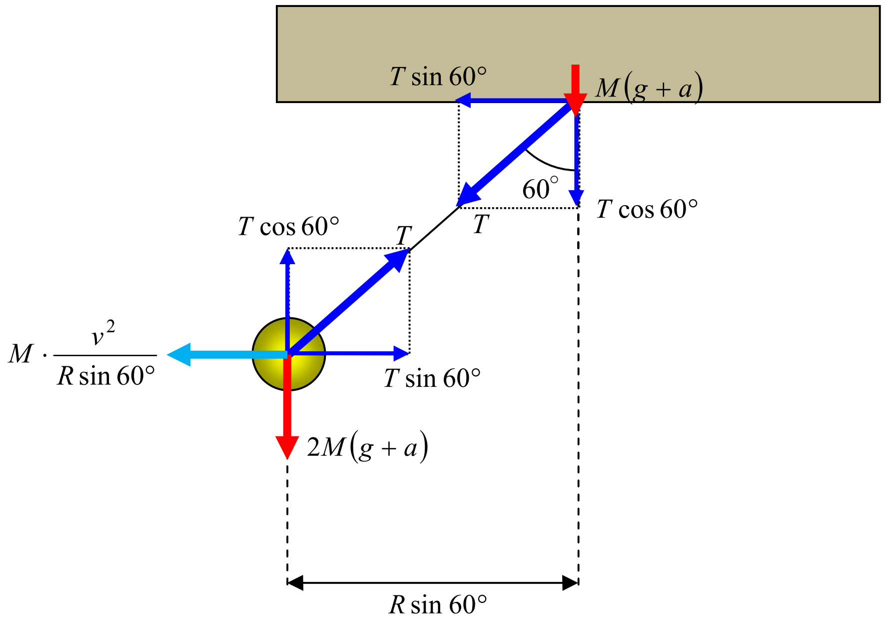
$\dfrac{2}{3}\pi\le\dfrac{2\pi}{T}t+\dfrac{2}{3}\pi\le 2\pi+\dfrac{\pi}{3} \quad \therefore 0\le t\le\dfrac{5}{6}T$

よって，$t_0=T\times\dfrac{5}{6}=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}\times\dfrac{5}{6} \quad \therefore \dfrac{5}{6}$ ・・・(答)



(2)

小球とともに運動する観測者の立場の図



$\boxed{ク}$

小球に働く鉛直方向の力のつり合いより，$T\cos 60° = 2M(g+a)$

よって，棚板に働く鉛直下向きの外力は，$T\cos 60° + M(g+a) = 3M(g+a)$

したがって，棚板が落下しないためには，$3M(g+a) < 4Mg$ であればよい。

$\therefore a < g\times\dfrac{1}{3} \quad \therefore \dfrac{1}{3}$ ・・・(答)

$\boxed{ケ}$

$T\cos 60° = 2M(g+a)$ より，$T = 4M(g+a)$

小球に働く水平方向の力のつり合いより，$M\cdot\dfrac{v^2}{R\sin 60°} = T\sin 60°$

$$
\begin{aligned}
\therefore v &= \sqrt{\frac{RT}{2M}}\sin 60° \\
&= \sqrt{2R(g+a)}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \sqrt{2R(g+a)}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&< \sqrt{2R\left(g+\frac{g}{3}\right)}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \sqrt{gR}\times\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore \sqrt{2}$ ・・・(答)