118. コンデンサーを含む回路と抵抗で消費されるエネルギー

(1)

抵抗を移動した電荷はコンデンサー1 に蓄えられることと
電流は単位時間に運ばれる電荷の大きさであることから，
ある時刻 t において抵抗を流れる電流を $I(t)$ とすると，
$I(t)$ はコンデンサー1 の極板に蓄えられる電荷の変化の極限で表される。
すなわち

$$I(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(Q+\Delta Q)-Q}{(t+\Delta t)-t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{dQ}{dt}\quad \therefore dQ=I(t)dt\quad \therefore Q=\int_0^{\infty}I(t)dt$$

よって，Q は図 2 の影を付けた部分の面積に他ならない。

$\therefore Q=I_0T$ ・・・①

一方，十分時間が経ったときコンデンサー1 に蓄えられた電荷は

$Q=CV$ ・・・②

①，②より，$C=\dfrac{I_0T}{V}$ ・・・③

ここで，時刻 t におけるコンデンサーの電圧を $V_{\mathrm{C}}(t)$ とすると，
キルヒホッフの法則より，$V=RI(t)+V_{\mathrm{C}}(t)$
$t=0$ のとき，$I(0)=I_0$，$V_{\mathrm{C}}(0)=0$ だから，$V=RI_0$ ・・・④

よって，③，④より，$C=\dfrac{T}{R}$ ・・・(答)

補足：図 2 のグラフの方程式を求めてみる。

時刻 t におけるコンデンサーの電圧を $V_{\mathrm{C}}(t)$ とすると，
これとキルヒホッフの法則より，$V=RI(t)+V_{\mathrm{C}}(t)$

これと $V_{\mathrm{C}}(t)=\dfrac{Q(t)}{C}$，$I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}$ より，$V=R\dfrac{dQ(t)}{dt}+\dfrac{Q(t)}{C}$

$$\therefore CV-Q(t)=RC\cdot\frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\therefore \frac{1}{CV-Q(t)}dQ(t)=\frac{dt}{RC}$$

$$\therefore \int\frac{1}{CV-Q(t)}dQ(t)=\int\frac{dt}{RC}$$

積分定数を α とすると，$-\log(CV-Q(t))=\dfrac{t}{RC}+\alpha\quad (\because CV>Q(t))$

$$\therefore CV-Q(t)=e^{-\left(\frac{t}{RC}+\alpha\right)}$$

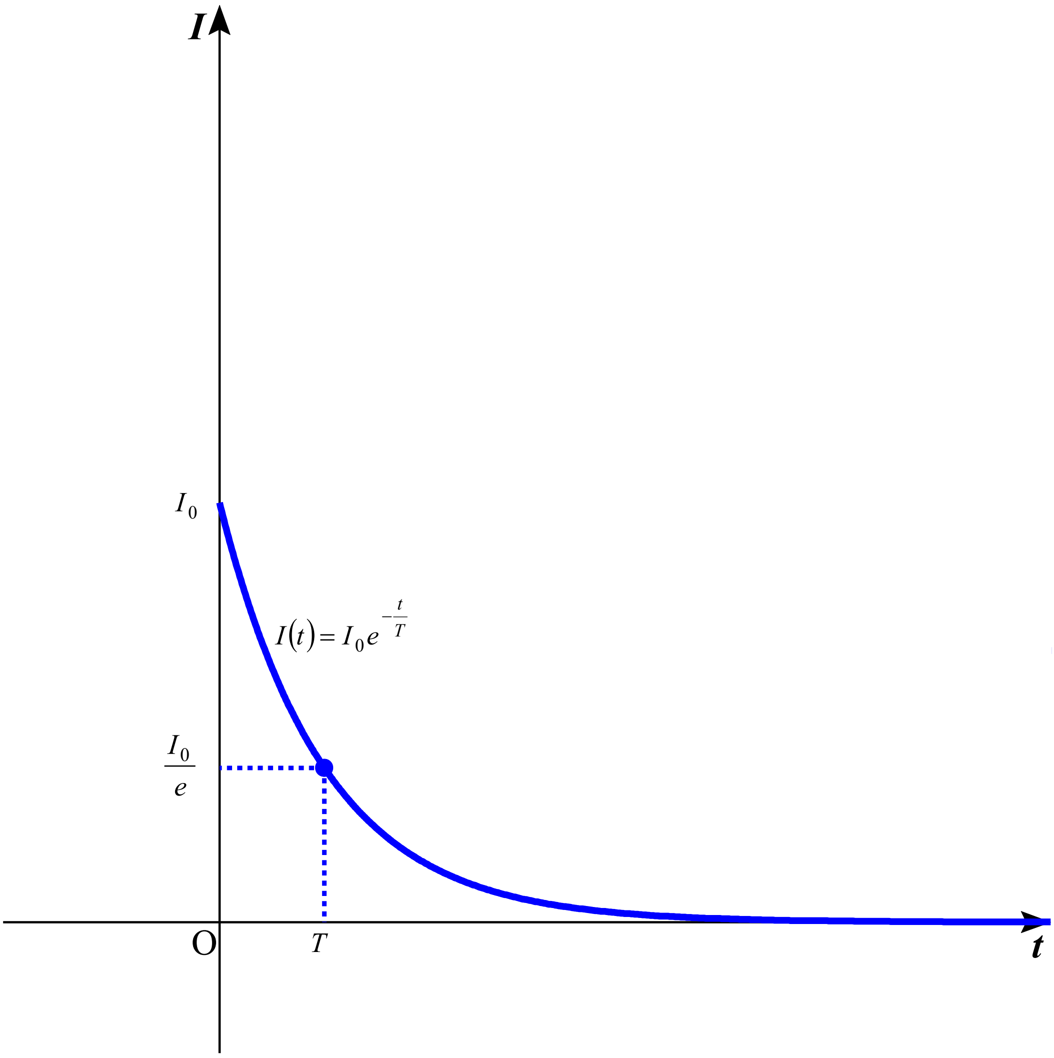
$t=0$ のとき $Q(0)=0$ だから，　$CV=e^{-\alpha}$

$$\therefore CV-Q(t)=e^{-\left(\frac{t}{RC}+\alpha\right)}$$
$$=e^{-\frac{t}{RC}}\cdot e^{-\alpha}$$
$$=e^{-\frac{t}{RC}}\cdot CV$$

$$\therefore Q(t)=CV\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

よって，　$I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}=\dfrac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ であり，　これと $\dfrac{V}{R}=I_0$，　$RC=T$ より，

$$I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{t}{T}}$$



(2)

抵抗の値が $\frac{R}{2}$ のとき，$t=0$ のときの電流を I_0'，電流が $\frac{I_0'}{e}$ に減少した時刻を $t=T'$

とすると，十分時間が経ったときコンデンサーに蓄えられた電荷は $I_0'T'$ である。

一方，コンデンサー1 に蓄えられる電荷は抵抗の値に依らず同じだから，$I_0'T'$ は抵抗の値が R のときの I_0T と等しい。よって，$I_0'T'=I_0T$ であり，

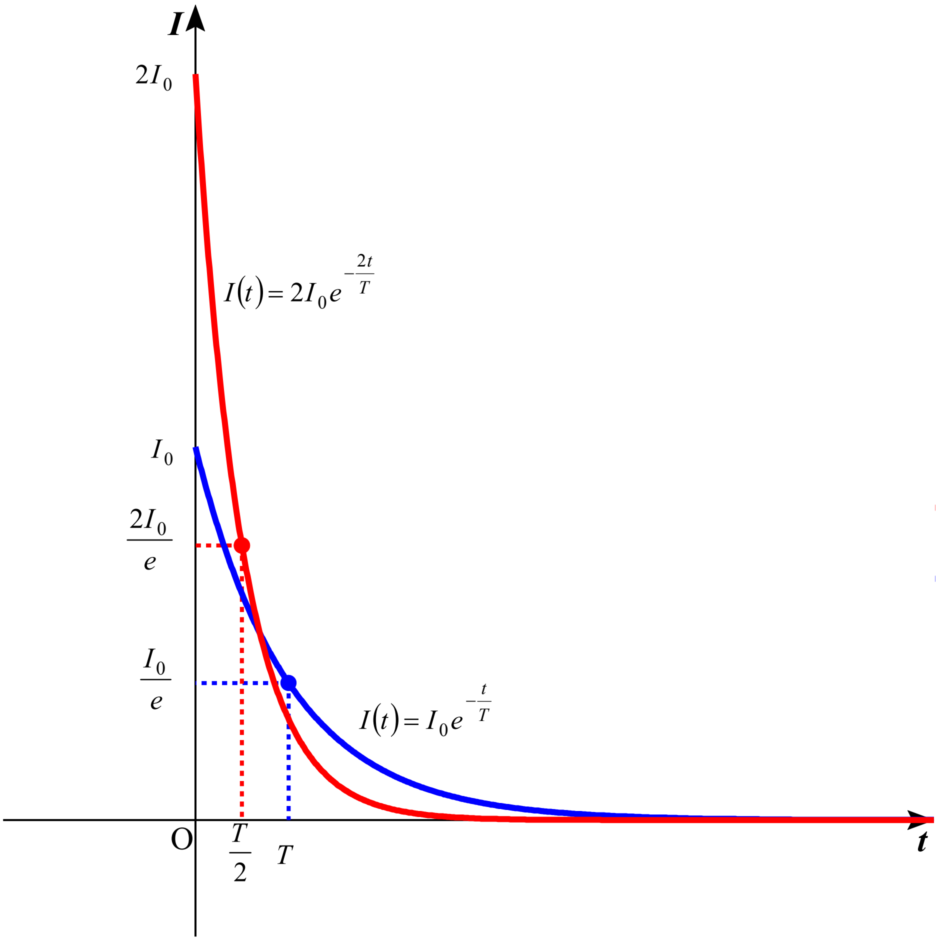
これと $I_0'=\frac{V}{\frac{R}{2}}=\frac{2V}{R}=2I_0$ より，$T'=\frac{T}{2}$

よって，$t=0$ のときの電流 $I_0'=2I_0$，電流が $\frac{I_0'}{e}=\frac{2I_0}{e}$ に減少した時刻 $t=T'=\frac{T}{2}$

補足：グラフの方程式を求めてみる。

(1)の $I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ の R に $\frac{R}{2}$ を代入することにより，$I(t)=\frac{2V}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$

これと $\frac{V}{R}=I_0$，$RC=T$ より，$I(t)=2I_0e^{-\frac{2t}{T}}$



(3)

コンデンサー1 とコンデンサー2 の電気容量が同じであることと
放電前のコンデンサー1 に蓄えられている電荷が $I_0 T$ であることから，

十分時間が経つと，コンデンサー2 に蓄えられた電荷は $\dfrac{I_0 T}{2}$ になる。

よって，抵抗を負の向きに移動した電荷の大きさは $\dfrac{I_0 T}{2} - 0 = \dfrac{I_0 T}{2}$

したがって，時刻 $t = 0$ のときの電流を I_0''，電流が $\dfrac{I_0''}{e}$ に減少した時刻を $t = T''$ とすると

$\left| I_0'' T'' \right| = \left| \dfrac{I_0 T}{2} \right|$　・・・①

また，スイッチ 2 を閉じる前のコンデンサー2 の極板間の電圧は 0 だから，
コンデンサー2 の 2 つの極板の電位はいずれもコンデンサー1 の負極板の電位と等しい。
よって，スイッチ 2 を閉じた瞬間のコンデンサー1 の正極板とコンデンサー2 の電位差は
コンデンサー1 の極板間の電位差と等しい。すなわち電位差は V である。

よって，$I_0'' = -\dfrac{V}{R} = -I_0$　・・・②

①，②より，$T'' = \dfrac{T}{2}$

以上より，

時刻 $t = 0$ のときの電流 $I_0'' = -I_0$，電流が $\dfrac{I_0''}{e}$ に減少した時刻 $t = T'' = \dfrac{T}{2}$

補足：グラフの方程式を求めてみる。

コンデンサー1 の極板間の電圧を $V_1(t)$，コンデンサー2 の極板間の電圧を $V_2(t)$，
電流を $I(t)$ とすると，回路の起電力が 0 だから，
キルヒホッフの法則の式は $0 = V_1(t) + RI(t) + V_2(t)$

放電中のコンデンサー1 に蓄えられている電荷を $Q(t)$ とすると $V_1(t) = \dfrac{Q(t)}{C}$，

$V_2(t)$ は $V_1(t)$ と逆向きでありかつ孤立部分の電気量 CV が保存されることから，

$V_2(t) = -\dfrac{CV - Q(t)}{C} = -V + \dfrac{Q(t)}{C}$

これと $I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$ より，キルヒホッフの式は $0 = \dfrac{Q(t)}{C} + R \cdot \dfrac{dQ(t)}{dt} - V + \dfrac{Q(t)}{C}$ となる。

$\therefore CV - 2Q(t) = RC \cdot \dfrac{dQ(t)}{dt}$

$$\therefore \frac{1}{2Q(t)-CV}dQ(t)=-\frac{dt}{RC}$$

$$\therefore \int \frac{1}{2Q(t)-CV}dQ(t)=-\int \frac{dt}{RC}$$

積分定数を β とすると， $\dfrac{\log(2Q(t)-CV)}{2}=-\dfrac{t}{RC}+\beta \quad \left(\because \dfrac{CV}{2}<Q(t)\leq CV\right)$

$$\therefore 2Q(t)-CV=e^{2\beta}\cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$$

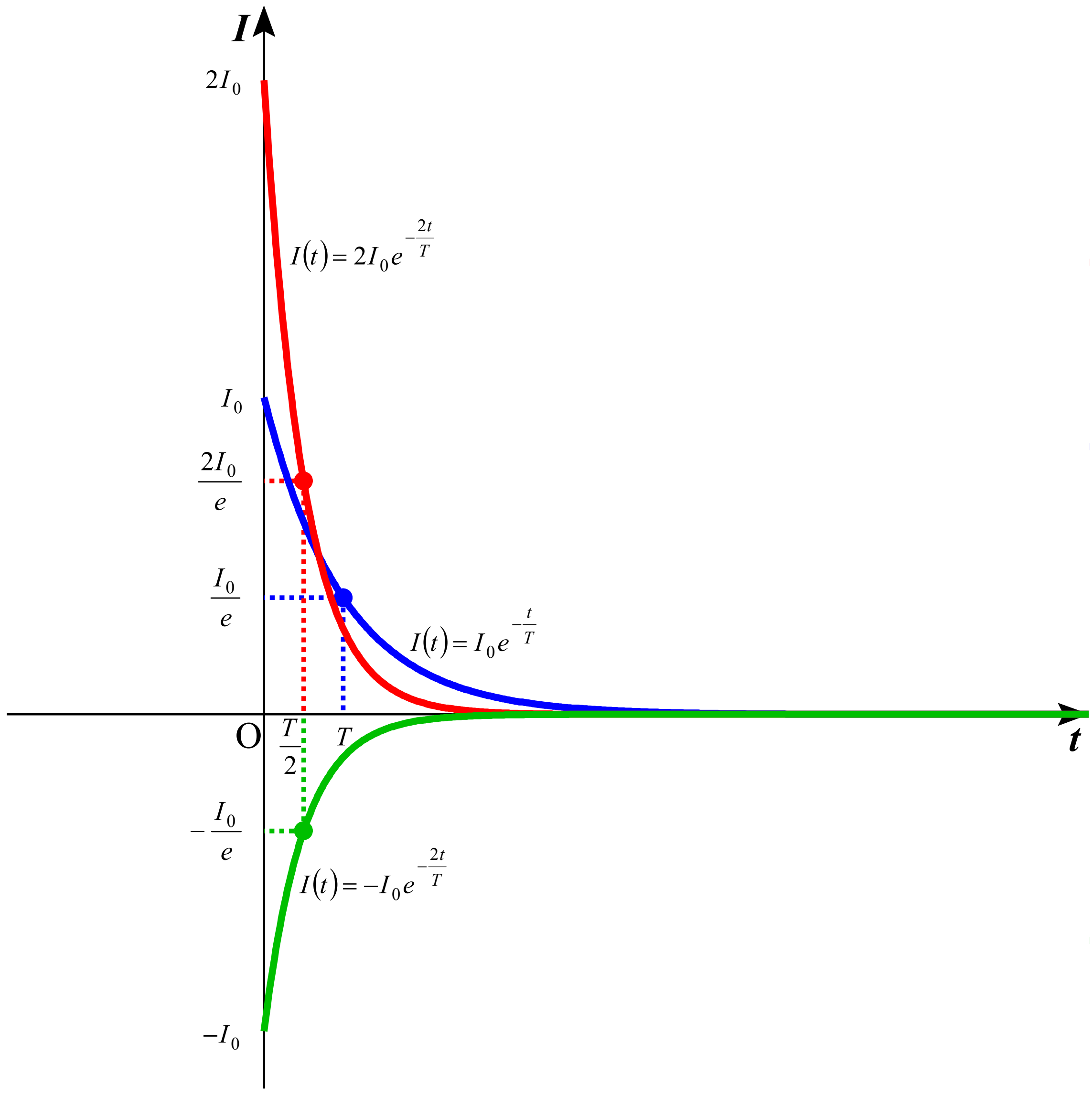
$t=0$ のとき $Q(0)=CV$ より， $CV=e^{2\beta}$

よって， $2Q(t)-CV=CV\cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$

$\therefore Q(t)=\dfrac{CV}{2}\left(1+e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$ （$\lim\limits_{t\to\infty}Q(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{CV}{2}\left(1+e^{-\frac{2t}{RC}}\right)=\dfrac{CV}{2}$ であることがわかる）

$$\therefore I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$$
$$=-\frac{V}{R}\cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$$

$\dfrac{V}{R}=I_0$， $RC=T$ より， $I(t)=-I_0\cdot e^{-\frac{2t}{T}}$


I
$2I_0$
$I(t)=2I_0e^{-\frac{2t}{T}}$
I_0
$\frac{2I_0}{e}$
$\frac{I_0}{e}$
$I(t)=I_0e^{-\frac{t}{T}}$
O
$\frac{T}{2}$
T
t
$-\frac{I_0}{e}$
$I(t)=-I_0e^{-\frac{2t}{T}}$
$-I_0$