

7. 斜面への斜方投射

(4)

斜面に垂直に衝突する直前の速さを求める。

$$\text{斜面に垂直に衝突する直前の } v_x = 0 \text{ より, } v_x = v_0 \cos \alpha_2 - g \sin \theta \cdot t = 0 \quad \therefore t = \frac{v_0 \cos \alpha_2}{g \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin \alpha_2 - g \cos \theta \cdot t \\ &= v_0 \sin \alpha_2 - g \cos \theta \cdot \frac{v_0 \cos \alpha_2}{g \sin \theta} \\ &= v_0 \sin \alpha_2 - \frac{v_0 \cos \alpha_2}{\tan \theta} \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ より, } \tan \theta = 1$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{1}{2} \text{ と三角比より, } \sin \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{よって, } v_y = v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - v_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{v_0}{\sqrt{5}}$$

$$\text{ゆえに, 斜面に衝突する直前の速さを } v_1 \text{ とすると, } v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0 + \left(-\frac{v_0}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{v_0}{\sqrt{5}}$$

はねかえった直後の速さを求める。

はねかえった直後の速さを v_2 とすると, 条件より,

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{v_0}{2\sqrt{5}}$$

1 回目の衝突から 2 回目の衝突までの時間を(1)で求めた式を使って求める。

(1)で得られた衝突するまでの時間の式 $\frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \theta}$ について, v_0 は初速度の大きさだから, v_0 に v_2 を, α は斜面に対する打ち上げ角度であり, 垂直にはねかえるから α に $\frac{\pi}{2}$ を, θ は斜面の傾斜角だから, θ に $\frac{\pi}{4}$ をそれぞれ代入すればよい。

$$\text{よって, 求める時間は, } \frac{2 \cdot \frac{v_0}{2\sqrt{5}} \sin \frac{\pi}{2}}{g \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{10}v_0}{5g}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 AB &= \frac{1}{2} g \cos \theta \cdot t^2 \\
 &= \frac{1}{2} g \cos \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{10}v_0}{5g} \right)^2 \\
 &= \frac{\sqrt{2}g}{4} \cdot \frac{10v_0^2}{25g^2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}v_0^2}{10g}
 \end{aligned}$$

あるいは,

(2)の式を利用することにより,

$$\frac{2v_0^2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right)}{g \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{v_0^2}{10} \cdot 1 \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{g}{2}} = -\frac{\sqrt{2}v_0^2}{10g}$$

値が負だから、Bは斜面にそってAの下方 $\frac{\sqrt{2}v_0^2}{10g}$ の位置にある。