

12. 斜面をもつ台にはたらく力のつりあい

\vec{OA} と \vec{OB} が互いに独立であるとする、
ベクトルと一次独立性より、

$$p\vec{OA} + q\vec{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow p = q = 0$$

力はベクトルであるから、

物体にはたらいている外力 \vec{F} は、任意の互いに独立な2つの分力 $p\vec{f}_a$ 、 $q\vec{f}_b$ を使うと、

$$p\vec{f}_a + q\vec{f}_b = \vec{F} \text{ と表され、}$$

$$\vec{F} = \vec{0} \text{ のとき、 } p = q = 0 \text{ より、 } p\vec{f}_a = q\vec{f}_b = \vec{0} \text{ である。}$$

つまり、

物体にはたらいている外力がつりあっているとき、

どの方向に分力をとっても、それぞれの分力の和は0となる。

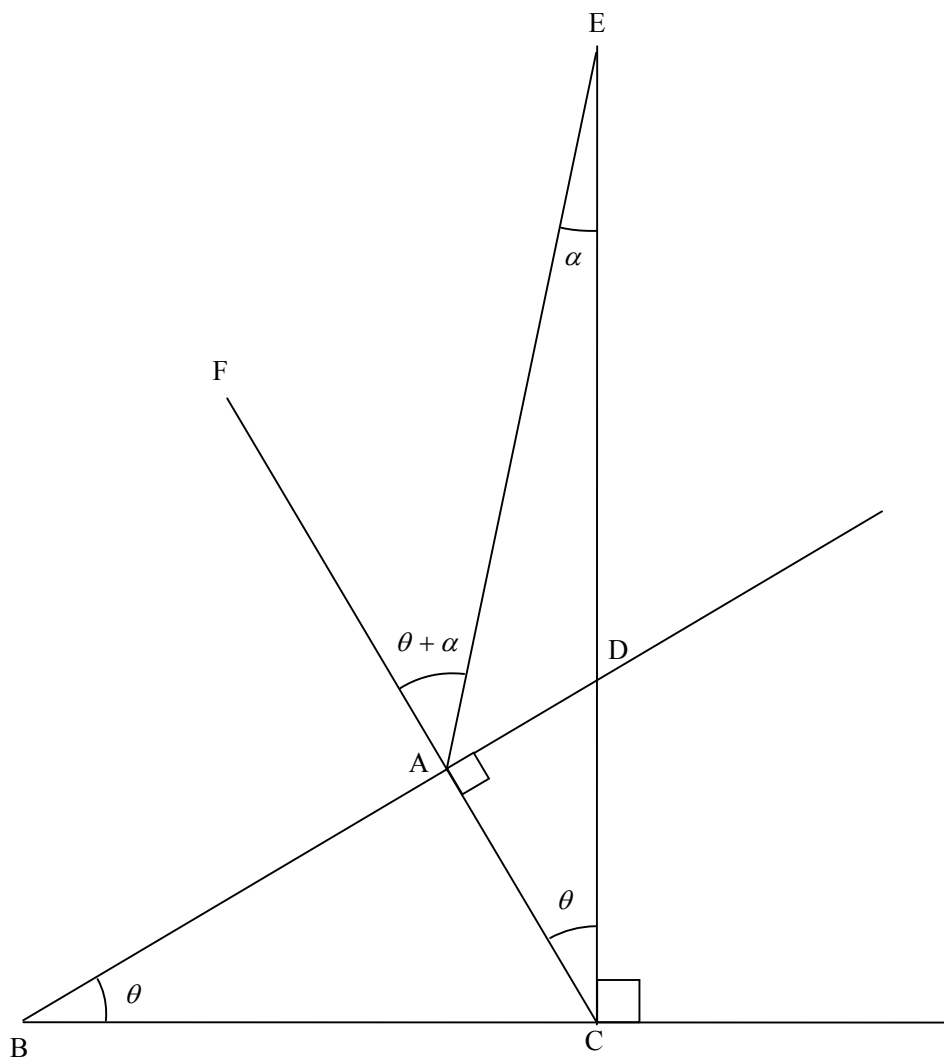
よって、

分力は式処理しやすい向きにとればよい。

[A]

(1)

分力をオーソドックスに，斜面に垂直な成分と斜面に沿った成分にした場合



$\triangle DBC \sim \triangle DCA$ より， $\angle DCA = \angle DBC = \theta$

よって， $\triangle ECA$ の内角と外角の関係から，

$$\angle EAF = \angle ECA + \angle CEA = \theta + \alpha$$

これをもとに力を図示すると、下図となる。

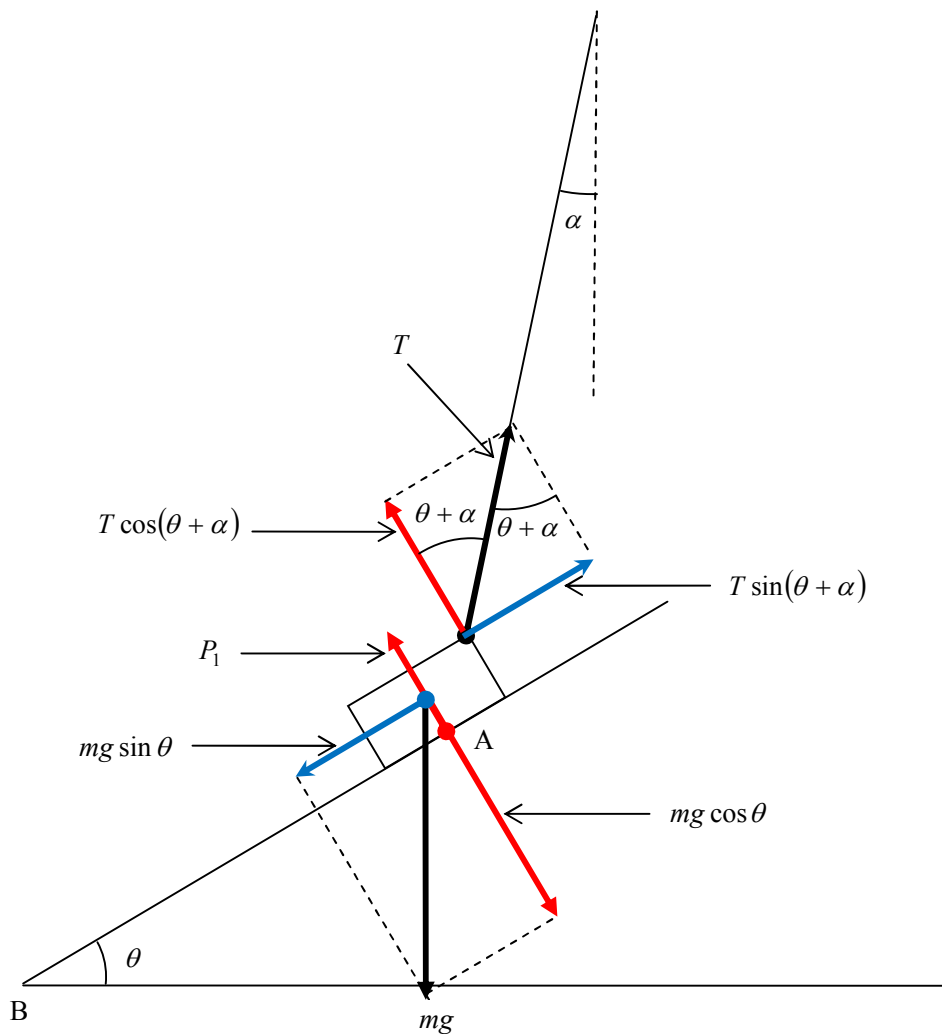
斜面に沿った分力のつりあいより、 $T \sin(\theta + \alpha) = mg \sin \theta$. . . ①

斜面に垂直な分力のつりあいより、 $P_1 + T \cos(\theta + \alpha) = mg \cos \theta$. . . ②

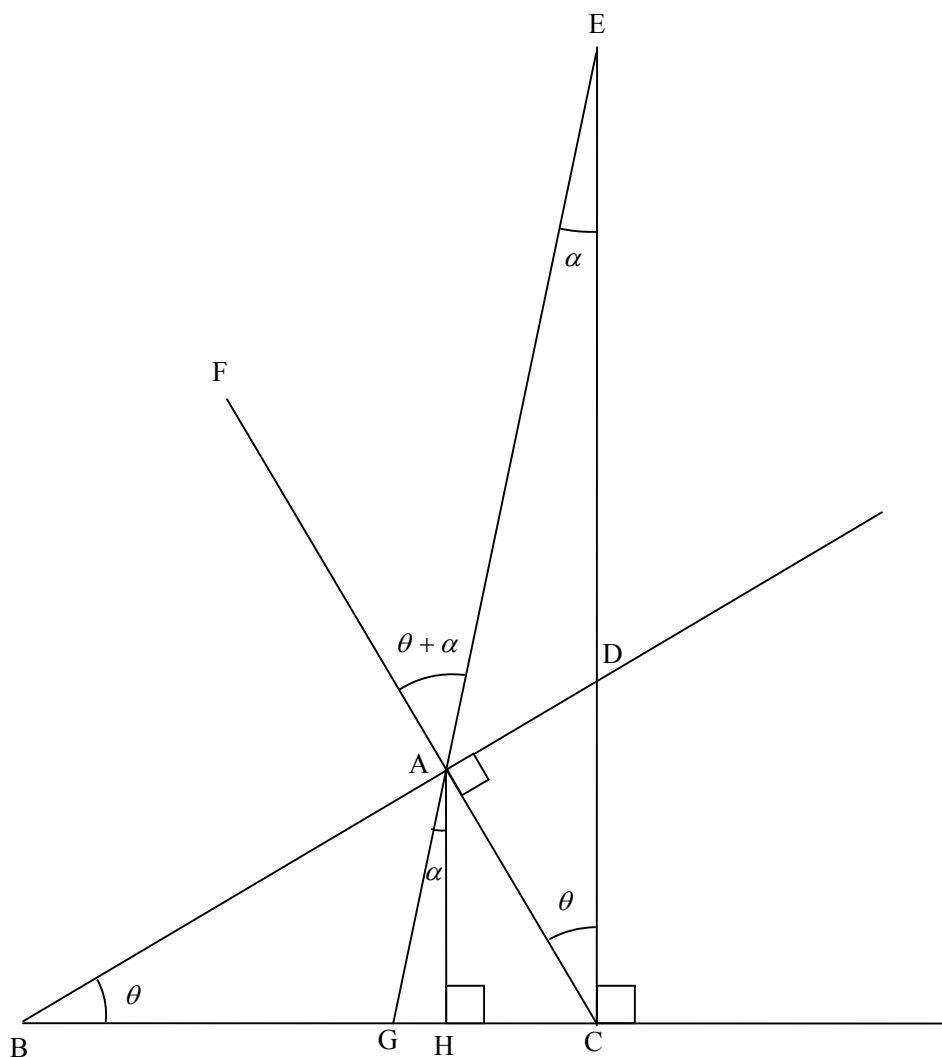
①より、 $T = \frac{mg \sin \theta}{\sin(\theta + \alpha)}$

これと②より、

$$\begin{aligned}
 P_1 &= mg \cos \theta - \frac{mg \sin \theta \cos(\theta + \alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} \\
 &= \frac{mg \{ \sin(\theta + \alpha) \cos \theta - \sin \theta \cos(\theta + \alpha) \}}{\sin(\theta + \alpha)} \\
 &= \frac{mg \sin \{ (\theta + \alpha) - \theta \}}{\sin(\theta + \alpha)} \\
 &= \frac{mg \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)}
 \end{aligned}$$



解答編別解の解説補充



$\triangle DBC \sim \triangle DCA$ より, $\angle DCA = \angle DBC = \theta$

よって, $\triangle ECA$ の内角と外角の関係から,

$$\angle EAF = \angle ECA + \angle CEA = \theta + \alpha$$

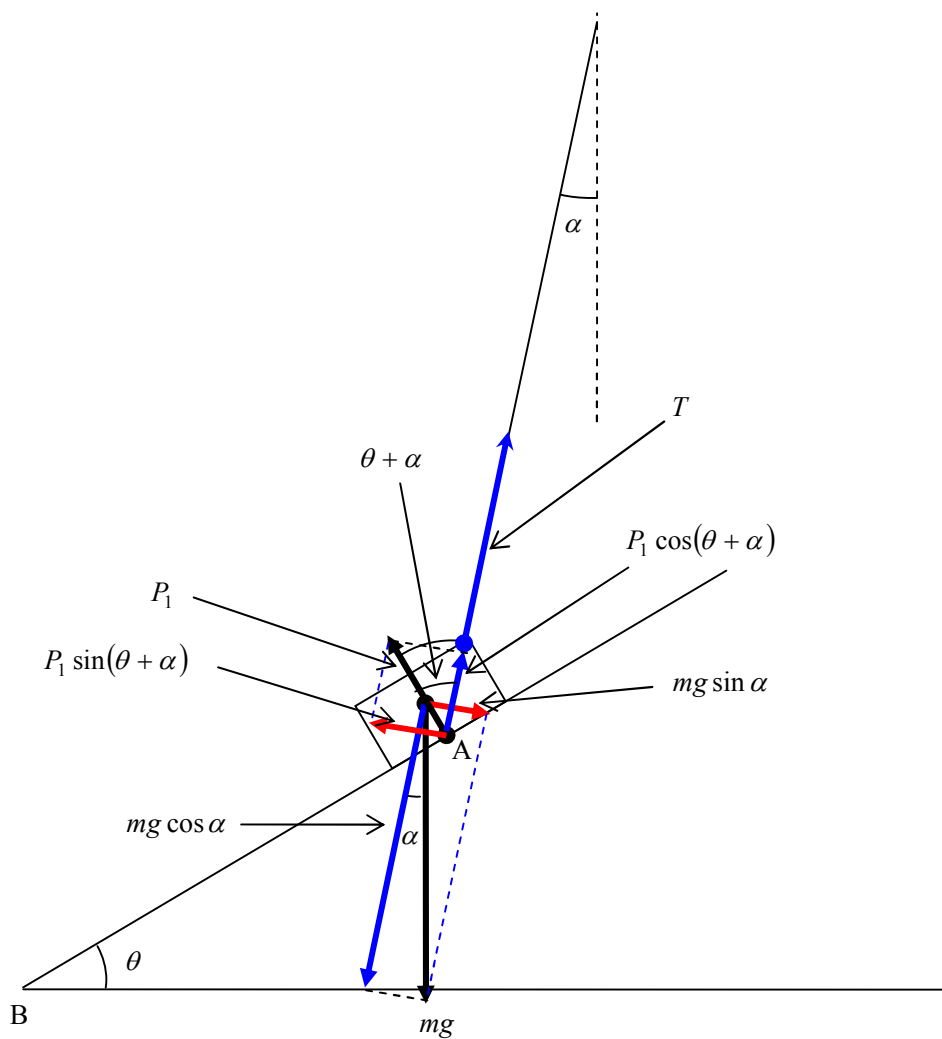
また, $AH \parallel EC$ より,

$$\angle GAH = \angle GEC = \alpha$$

これをもとに力を図示すると，下図となる。

$$P_1 \sin(\theta + \alpha) = mg \sin \alpha \text{ より, } P_1 = \frac{mg \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)}$$

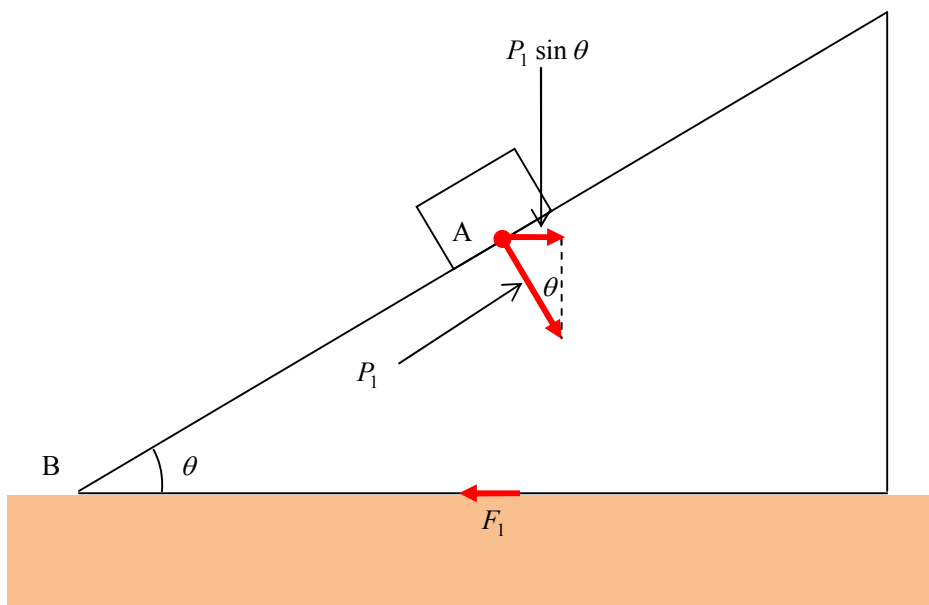
$$\text{これと, } T + P_1 \cos(\theta + \alpha) = mg \cos \alpha \text{ より, } T = \frac{mg \sin \theta}{\sin(\theta + \alpha)}$$



(2)

作用・反作用の関係より，台は小物体から大きさ P_1 の垂直抗力を受ける。

よって，水平方向の力のつりあいより， $F_1 = P_1 \sin \theta \quad \therefore F_1 = \frac{mg \sin \alpha \sin \theta}{\sin(\theta + \alpha)}$



(4)

同様に， $F_2 = P_2 \sin \theta \quad \therefore F_2 = mg \cos \theta \sin \theta$

補足

$mg \cos \theta$ は小物体の重力の斜面に垂直な分力であり，小物体が斜面と接触しているとき，この力と小物体が斜面から受ける垂直抗力がつり合っている。

垂直抗力は作用・反作用の力だから，斜面は同じ大きさの垂直を小物体から受ける。

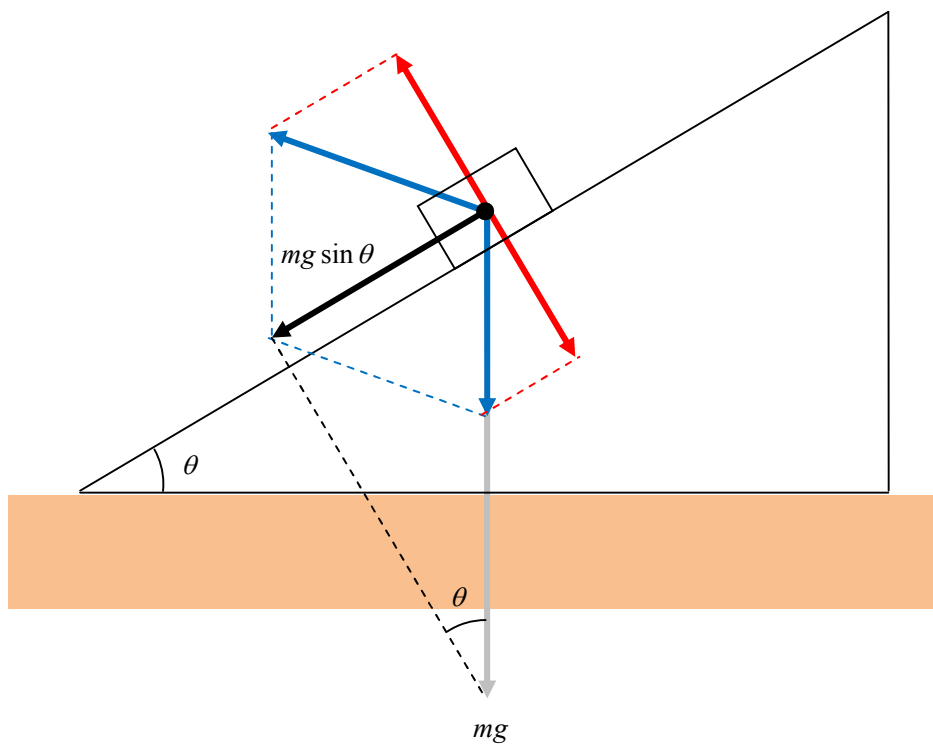
よって，

小物体の重力の斜面に垂直な分力の大きさ $mg \cos \theta$

= 小物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさ P_2

= 斜面が小物体から受ける垂直抗力の大きさ P_2

$mg \sin \theta$ は重力の斜面に沿った分力だから、
 $mg \sin \theta$ をさらに任意の分力に分解したところで、
斜面に垂直な分力のベクトル和は0になってしまう。
つまり、小物体と台との間の抗力を考える上で関係のない力である。
当たり前のことではあるが注意。



黒色ベクトルは mg の斜面に沿った分力ベクトルで、これを青色ベクトルに分解し、それぞれの斜面に垂直なベクトル成分（赤色）の和をとると、そのベクトル和は0である。