34. ばねにつながれた物体の運動と運動エネルギー

[A]

(1)

仕事は力ベクトルと変位ベクトルの内積だから，

動摩擦力が物体 B にした仕事は， $\mu' mg \cdot l \cdot \cos 180^\circ = -\mu' mgl$

物体のはじめの運動エネルギー＋物体にした仕事＝物体のおわりの運動エネルギー

より，

$E + (-\mu' mgl) = E'$

$\therefore E' = E - \mu' mgl$ ・・・(答)

(2)

解法 1：運動量保存則から解く

衝突時に物体 A と物体 B が受ける力積（または運動方程式の外力）は，

物体 A と物体 B の間の作用・反作用の力のみによるから，

物体 A と物体 B の運動量の和は衝突直前と直後で保存される。

よって，衝突直後の物体 AB の速度を V とすると，

$(m+m)V = m \cdot 0 + mv_{\mathrm{B}}$

$\therefore V = \dfrac{v_{\mathrm{B}}}{2}$ ・・・①

一方，衝突直前の物体 B の運動エネルギーは，(1)より， $E - \mu' mgl$ だから，

$\dfrac{1}{2} m{v_{\mathrm{B}}}^2 = E - \mu' mgl$

$\therefore m{v_{\mathrm{B}}}^2 = 2(E - \mu' mgl)$ ・・・②

①，②より，

衝突直後の物体 AB の運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}(m+m)V^2 = mV^2$$

$$= m\left(\frac{v_{\mathrm{B}}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{m{v_{\mathrm{B}}}^2}{4}$$

$$= \frac{E - \mu' mgl}{2}$$ ・・・(答)

解法 2：衝突の瞬間の運動方程式から解く（運動方程式から運動量保存則へ）

左向きの速度を正とする。

衝突の瞬間の物体 A，物体 B の加速度をそれぞれ a_{A}， a_{B} とすると，

衝突時に物体 A が受ける外力は，物体 B からの左向きの垂直抗力 f だから，

（ばねは自然長だから，衝突の瞬間に物体 A がばねから受ける外力は 0 である。）

運動方程式は，

$ma_{\mathrm{A}} = f$ ・・・③

衝突時に物体 B が受ける外力は，物体 A からの右向きの垂直抗力 $-f$ だから，

運動方程式は，

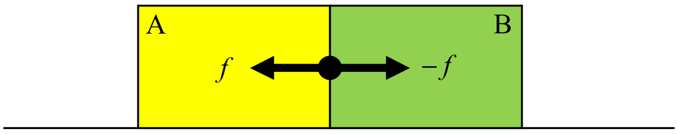
$ma_{\mathrm{B}} = -f$ ・・・④

③＋④より，

$m(a_{\mathrm{A}} + a_{\mathrm{B}}) = 0$

よって，

$a_{\mathrm{A}} = -a_{\mathrm{B}}$ ・・・⑤



衝突時間を Δt， 衝突後の物体 AB の速度を V， 衝突直前の物体 B の速度を v_{B} とおくと，

$a_{\mathrm{A}} = \dfrac{V-0}{\Delta t}$ ・・・⑥

$a_{\mathrm{B}} = \dfrac{V-v_{\mathrm{B}}}{\Delta t}$ ・・・⑦

⑤，⑥，⑦より，

$\dfrac{V-0}{\Delta t} = -\dfrac{V-v_{\mathrm{B}}}{\Delta t}$

$\therefore V = \dfrac{v_{\mathrm{B}}}{2}$ ・・・⑧

一方，衝突前の物体 B の運動エネルギーは，(1)より， $E-\mu' mgl$ だから，

$\dfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}{}^2 = E - \mu' mgl$

$\therefore mv_{\mathrm{B}}{}^2 = 2(E-\mu' mgl)$ ・・・⑨

⑧，⑨より，

衝突直後の物体 AB の運動エネルギーは，

$\dfrac{1}{2}(m+m)V^2 = mV^2 = m\left(\dfrac{v_{\mathrm{B}}}{2}\right)^2 = \dfrac{mv_{\mathrm{B}}{}^2}{4} = \dfrac{E-\mu' mgl}{2}$

補足

運動方程式から運動量保存の式へ

③，⑥より，

$ma_{\mathrm{A}} = f$

$\dfrac{mV}{\Delta t} = f$

$\therefore mV = f\Delta t$ ・・・⑩

④，⑦より，

$\dfrac{mV - mv_{\mathrm{B}}}{\Delta t} = -f$

$\therefore mV - mv_{\mathrm{B}} = -f\Delta t$ ・・・⑪

⑩＋⑪より，

$mV + mV - mv_{\mathrm{B}} = 0$

$\therefore 2mV = mv_{\mathrm{B}}$ ・・・⑫

式⑫の左辺は衝突直後の運動量，右辺は衝突直前の運動量を表している。

以上より，

2 物体の運動量変化の原因となる外力が 2 物体間の作用・反作用の力による場合，

それぞれの物体の運動量変化の式（左辺：運動量変化，右辺：力積）の和をとると，

右辺の力積が打ち消し合い，その和が 0 になる。

よって，両辺の運動量を運動量変化前と変化後でわけると，

変化前の運動量の和＝変化後の運動量となる。

すなわち，運動量が保存される。

以上より，

運動量が保存されるのは，

運動量変化の原因となる力が両物体間の作用・反作用の力であるときである。

また，

「エネルギーと仕事」と同じく「運動量保存と力積」も物理問題を楽に解く手段であるので，

運動系をうまく選び運動量保存則を使えるようにするのが複雑な問題を解くコツになる。

解法 3：重心の運動エネルギーが保存されることを使って解く

「運動系の運動量が保存される⇔運動系の重心の運動エネルギーが保存される」

衝突直前と直後で物体 A と物体 B から成る運動系の運動量の和が保存されるから，

物体 A と物体 B から成る運動系の重心の運動エネルギーも衝突直前と直後で保存される。

衝突直後

衝突直後は 1 つの物体 AB となるから，物体 AB の速度＝物体 AB の重心の速度

よって，

物体 AB の運動エネルギー＝物体 AB の重心の運動エネルギー　・・・③

衝突直前

衝突直前の重心の速度を v_G，物体 B の速度を v_B とする。

物体 A の速度は 0 だから，

$$v_G = \frac{mv_B + m \cdot 0}{m+m} = \frac{v_B}{2}$$

よって，衝突直前の物体 A と物体 B から成る運動系の重心の運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}(m+m)v_G{}^2 = m\left(\frac{v_B}{2}\right)^2 = \frac{mv_B{}^2}{4} \quad ・・・④$$

一方，衝突直前の物体 B の運動エネルギーは，(1)より，$E - \mu' mgl$ だから，

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 = E - \mu' mgl$$

$$\therefore mv_B{}^2 = 2(E - \mu' mgl) \quad ・・・⑤$$

③，④，⑤より，

物体 AB の運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}(m+m)v_G{}^2 = m\left(\frac{v_B}{2}\right)^2 = \frac{mv_B{}^2}{4} = \frac{E - \mu' mgl}{2}$$

運動量保存と運動エネルギー保存について

質点の運動エネルギーの和＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギーの和

証明

重心の位置，速度のベクトルをそれぞれ $\vec{X}$，$\vec{V}$

質点の位置，速度のベクトルをそれぞれ $\vec{x}_i$，$\vec{v}_i$ で表すと，

$$\vec{X}=\frac{\sum m_i\vec{x}_i}{M}\ \left(M=\sum m_i\right)$$

$$\vec{V}=\frac{d\vec{X}}{dt}=\frac{\sum m_i\left(\frac{d\vec{x}_i}{dt}\right)}{M}=\frac{\sum m_i v_i}{M}$$

$$\therefore M\vec{V}=\sum m_i\vec{v}_i \quad ・・・①$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)^2&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}-\vec{V}\sum m_i\vec{v}_i+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}-\vec{V}\sum m_i\vec{v}_i+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}-\vec{V}M\vec{V}+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}-M\vec{V}^2+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i^{\,2}\end{aligned}$$

重心から見た質点の運動量の総和は **0** である。

証明

式①より，

$$\sum m_i\vec{v}_i-M\vec{V}=0$$

ここで，$M\vec{V}=\sum m_i\vec{V}$ より，

$$\sum m_i\vec{v}_i-\sum m_i\vec{V}=0$$

$$\sum m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)=0$$

$m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)$ は重心から見た質点の運動量を表す。

よって，

重心から見た質点の運動量の総和は 0 である。

質点の運動量の総和が保存される⇔重心の運動エネルギーが保存される

証明

式①の右辺は質点の運動量の総和を表している。

よって，質点の運動量が保存されるとき，$\vec{C}$ を定ベクトルとすると，$\sum m_i \vec{v}_i = \vec{C}$

$M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i$ より，

$M\vec{V} = \vec{C}$

$\vec{V} = \dfrac{\vec{C}}{M}$

よって，重心の速度 $\vec{V}$ は一定である。

ゆえに，$\dfrac{1}{2}M\vec{V}^2$ は一定，すなわち重心の運動エネルギーは保存される。

同様に，$\dfrac{1}{2}M\vec{V}^2$ が一定のとき，$\sum m_i \vec{v}_i$ が一定である。

すなわち質点の運動量の総和は保存される。

補足

「質点の運動エネルギー＝重心の運動エネルギー＋重心からみた質点の運動エネルギー」
だから，質点の運動エネルギーが保存されるとき，重心の運動エネルギーも保存される。
重心の運動エネルギーが保存されることと質点の運動量が保存されることは同値だから，
このとき質点の運動量も保存される。
しかし，質点の運動量が保存されても，重心の運動エネルギーは保存されるが，
質点の運動エネルギーが保存されるとは限らない。
つまり，
「質点の運動エネルギーが保存される⇒質点の運動量が保存される」は常に成り立つが，
逆は常には成り立たない。

[B]

(3)

物体 AB とばねから成る系を物体系とすると，

衝突直後の物体系のエネルギー＋非保存力が物体系にした仕事

　＝静止時の物体系のエネルギー

衝突直後の物体系のエネルギー

　物体 AB の運動エネルギーだけだから，(2)より $\dfrac{E-\mu' mgl}{2}$

非保存力が物体系にした仕事

　動摩擦力が物体 AB にした仕事だから，$-\mu'\cdot 2mg\cdot x$

静止時の物体系のエネルギー

　ばねの弾性エネルギーだから，$\dfrac{1}{2}kx^2$

よって，

$$\frac{E-\mu' mgl}{2}+\left(-\mu'\cdot 2mg\cdot x\right)=\frac{1}{2}kx^2$$

$$kx^2+4\mu' mgx+\mu' mgl-E=0$$

$kl=3\mu' mg$ より，$kx^2+\dfrac{4}{3}klx+\dfrac{kl^2}{3}-E=0$

$$3kx^2+4klx+kl^2-3E=0$$

解の公式および $x>0$ より，

$$x=\frac{-2kl+\sqrt{4k^2l^2-3k\left(kl^2-3E\right)}}{3k}$$

$$=\frac{-2kl+\sqrt{k^2l^2+9kE}}{3k}$$

$$=-\frac{2}{3}l+\sqrt{\frac{l^2}{9}+\frac{E}{k}}\quad\cdots\text{(答)}$$

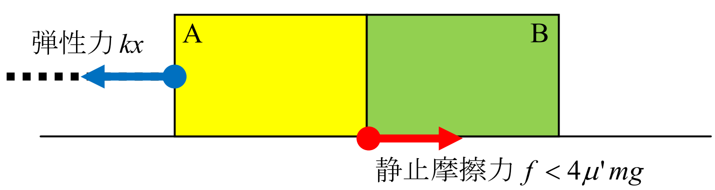
(4)

物体 AB にはたらく最大摩擦力の大きさは，$\mu\cdot 2mg=2\mu'\cdot 2mg=4\mu' mg$

静止したときの物体 AB にはたらく弾性力の大きさは kx で，$kx<kl=3\mu' mg$

よって，$kx<kl<4\mu' mg$

ゆえに，物体 AB は静止したままである。



[C]

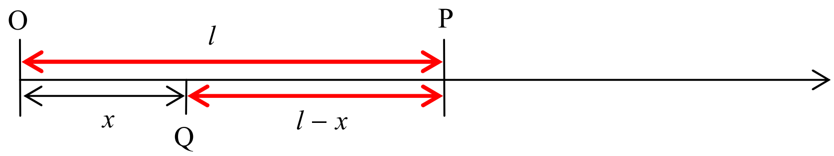
(5)

衝突直後の物体系のエネルギー＋非保存力が物体系にした仕事

＝静止時の物体系のエネルギー

衝突直後の物体系のエネルギー＝$\dfrac{E-\mu' mgl}{2}$

非保存力が物体系にする仕事とは，動摩擦力が物体 AB にする仕事のことである。



物体 AB が動摩擦力を受けるのは O→P と P→Q だから，

動摩擦力を受けた長さは $l+(l-x)=2l-x$

よって，動摩擦力が物体 AB にした仕事は，$-\mu'\cdot 2mg\cdot(2l-x)$

静止時の物体系のエネルギー＝ばねの弾性エネルギー＝$\dfrac{1}{2}kx^2$

以上より，

$$\frac{E-\mu' mgl}{2}+\{-2\mu' mg(2l-x)\}=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E-\mu' mgl-8\mu' mgl+4\mu' mgx=kx^2$$

$$kx^2-4\mu' mgx+9\mu' mgl-E=0$$

$kl=3\mu' mg$ より，$kx^2-\dfrac{4}{3}klx+3kl^2-E=0$

$$\therefore 3kx^2-4klx+9kl^2-3E=0$$

解の公式より，

$$x=\frac{2kl\pm\sqrt{4k^2l^2-3k(9kl^2-3E)}}{3k}$$

$$=\frac{2}{3}l\pm\frac{\sqrt{9kE-23k^2l^2}}{3k}$$

$$=\frac{2}{3}l\pm\sqrt{\frac{E}{k}-\frac{23}{9}l^2}$$

E が大きいほど物体 AB が動摩擦力を受ける距離（上図 OP＋PQ）が長くなるため，

x が小さくなる。したがって，これを満たす解が答となる。

よって，$x=\dfrac{2}{3}l-\sqrt{\dfrac{E}{k}-\dfrac{23}{9}l^2}$　・・・(答)

[D]

(6)

(5)の方程式 $3kx^2 - 4klx + 9kl^2 - 3E = 0$ において,

$E = E_1$ のときの方程式

$3kx^2 - 4klx + 9kl^2 - 3E_1 = 0$ の解が $x = 0$ だから,

$x = 0$ を代入すると,

$9kl^2 - 3E_1 = 0$

$\therefore kl^2 = \dfrac{E_1}{3}$

(ｉ) 物体 B が物体 A と一体とならないとき

つまり,物体 B が P→O の途中で静止するとき,物体 A は $x = 0$ にとどまったままである。

このときの物体 B に与える運動エネルギー E の条件を求めてみよう。

物体 B に与えた運動エネルギー E のすべてが物体 B に対する動摩擦力の仕事により,

物体 A と一体になることなく失われる。

また,物体 A と一体になるまでに動摩擦力が物体 B にする仕事の最大値は $\mu' mgl$ である。

よって,

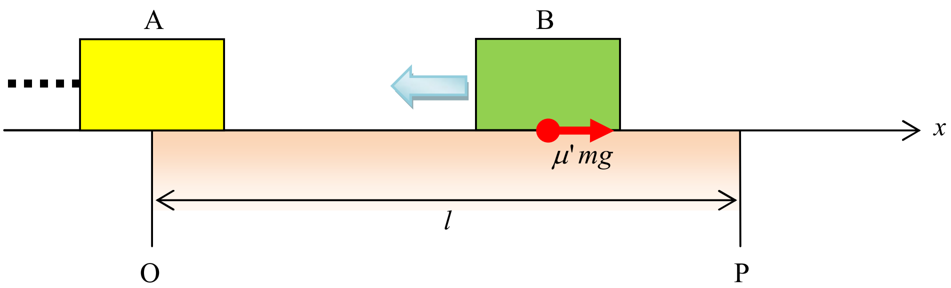
$E - \mu' mgl < 0$

これと, $kl = 3\mu' mg$, $kl^2 = \dfrac{E_1}{3}$ より,

$0 \le E < \mu' mgl = \dfrac{1}{3}kl^2 = \dfrac{1}{9}E_1$

よって,

$0 \le E < \dfrac{1}{9}E_1$ のとき, $x = 0$



（ⅱ）物体 AB が O→P の途中で静止するとき

(3)より，

$$x=-\frac{2}{3}l+\sqrt{\frac{l^2}{9}+\frac{E}{k}},\quad 0\leq x\leq l \text{ より，}$$

$$0\leq -\frac{2}{3}l+\sqrt{\frac{l^2}{9}+\frac{E}{k}}\leq l$$

$$\frac{2}{3}l\leq\sqrt{\frac{l^2}{9}+\frac{E}{k}}\leq\frac{5}{3}l$$

$$\frac{4}{9}l^2\leq\frac{l^2}{9}+\frac{E}{k}\leq\frac{25}{9}l^2$$

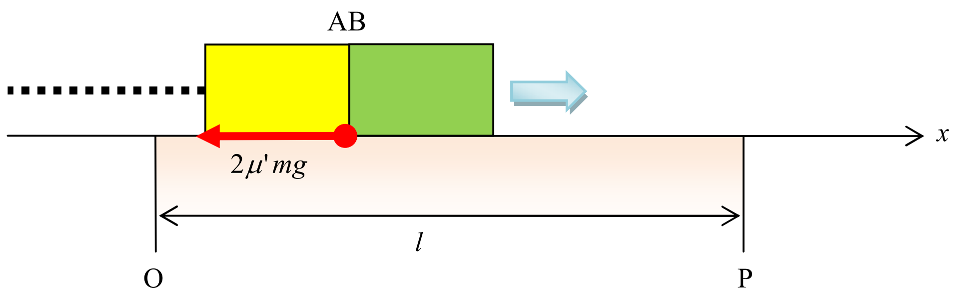
$$\frac{1}{3}kl^2\leq E\leq\frac{8}{3}kl^2$$

$$kl^2=\frac{E_1}{3} \text{ より，}$$

$$\frac{1}{9}E_1\leq E\leq\frac{8}{9}E_1$$

よって，

$$\frac{1}{9}E_1\leq E\leq\frac{8}{9}E_1 \text{ のとき，}\quad x=-\frac{2}{3}l+\sqrt{\frac{l^2}{9}+\frac{E}{k}}\quad\left(\frac{1}{3}l^2\leq\frac{E}{k}\leq\frac{8}{3}l^2\right)$$



（iii）物体 AB が P→O の途中で静止するとき

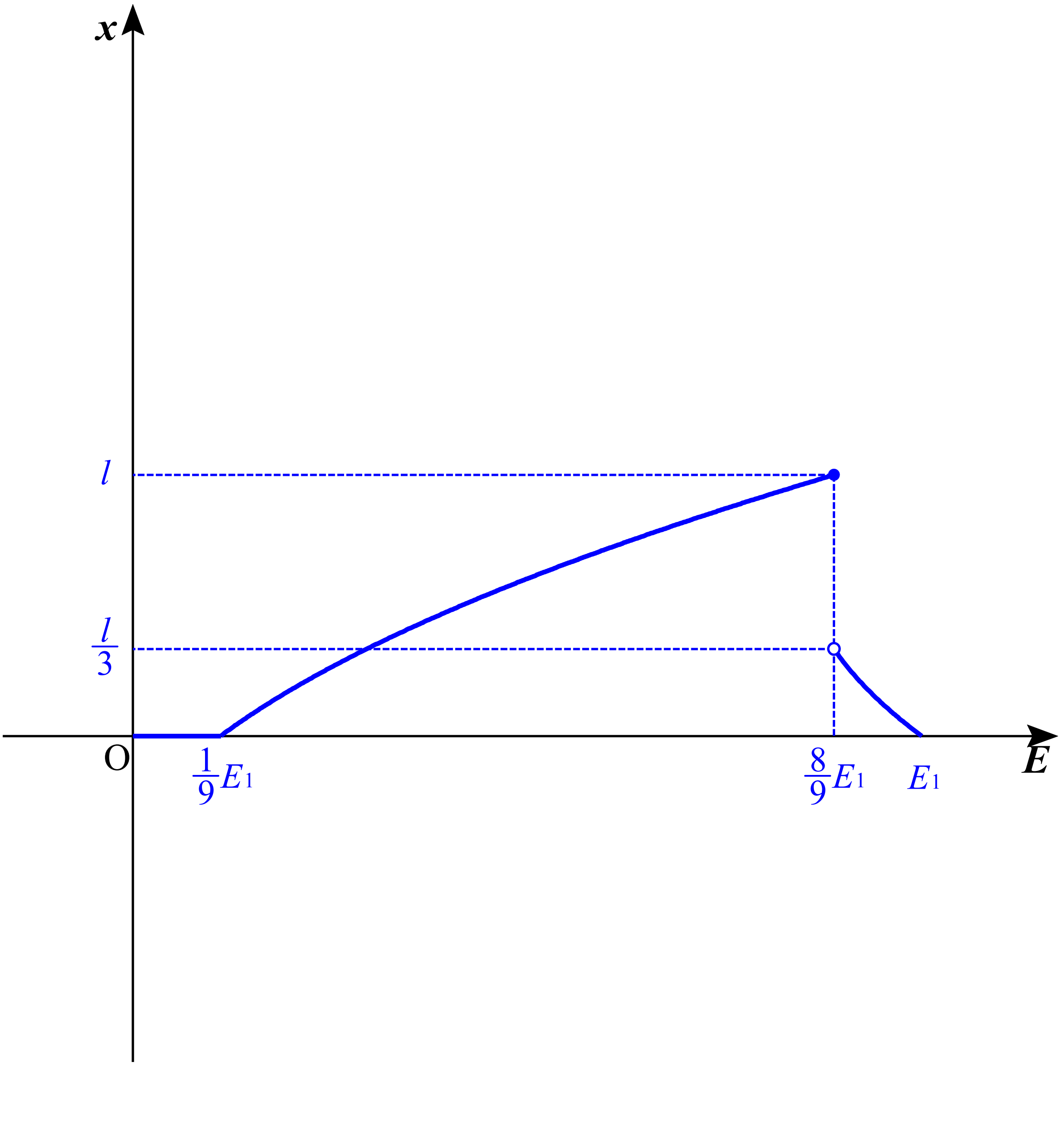
(5)より，$x=\dfrac{2}{3}l-\sqrt{\dfrac{E}{k}-\dfrac{23}{9}l^2}$

また，（ii）より，$\dfrac{8}{9}E_1<E\leqq E_1$ であり，$kl^2=\dfrac{E_1}{3}$ から，$E_1=3kl^2$ であるから，

$\dfrac{8}{3}kl^2<E\leqq 3kl^2$　　$\therefore \dfrac{8}{3}l^2<\dfrac{E}{k}\leqq 3l^2$

よって，$\dfrac{8}{9}E_1<E\leqq E_1$ のとき，$x=\dfrac{2}{3}l-\sqrt{\dfrac{E}{k}-\dfrac{23}{9}l^2}$　$\left(\dfrac{8}{3}l^2<\dfrac{E}{k}\leqq 3l^2\right)$

（i），（ii），（iii）より



仕事とエネルギー

保存力

ある力の物体にする仕事が，どのような経路をとろうと，
物体のはじめの位置とおわりの位置だけで決まるとき，その力を保存力という。
大きさが，一定あるいは基準位置からの距離の関数で表され，
向きがある平面に垂直あるいはある1点のへの向きだったりするような力は保存力である。
たとえば，

mg で表される重力や qE であらわされるクーロン力，$G\dfrac{Mm}{r^2}$ で表される万有引力，

$k\dfrac{Qq}{r^2}$ で表されるクーロン力，$-Kx$ で表される力などは保存力である。

これらの力はいずれも空間全体を支配し，その性質と特徴づける力（場の力）でもある。
これに対し摩擦力や抵抗力など仕事が経路に依存する力を非保存力という。

保存力と運動エネルギー，保存力の位置エネルギー

保存力がはたらく空間に存在する物体は，位置だけで決まるエネルギーをもち，
そのエネルギーを保存力の位置エネルギーあるいは単に位置エネルギーという。
物体がもつ保存力の位置エネルギーは，保存力がした仕事の分だけ減少し，
物体の運動エネルギーは，保存力が物体にした仕事の分だけ増加する。
つまり，
はじめの位置エネルギーを U_1，おわりの位置エネルギーを U_2，
はじめの運動エネルギーを K_1，おわりの運動エネルギーを K_2，保存力がした仕事を W
とすると，

$U_1 - W = U_2$　・・・①

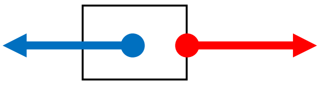
$K_1 + W = K_2$　・・・②

と表される。
よって，①＋②より，$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$ が成り立つ。
すなわち
物体にする仕事が保存力だけのとき，位置エネルギー＋運動エネルギー＝一定
が成り立つ。
たとえば，物体がクーロン力と重力のみを受ける場合，
クーロン力の位置エネルギー＋重力の位置エネルギー＋運動エネルギー＝一定
となる。

保存力とつりあいの関係の外力が物体に仕事をしたときの位置エネルギー

保存力とつりあいの関係の外力で物体に W の仕事をしたとき，

保存力の向きと外力の向きは反対向きだから，保存力がした仕事は $-W$ となる。



よって，式①より，$U_1-(-W)=U_2$

$\therefore U_1+W=U_2$

つまり，

はじめの位置エネルギー＋保存力とつりあう外力がした仕事＝おわりの位置エネルギー

保存力とつりあいの関係の外力が物体に仕事をするとき，

その仕事の分だけ物体の保存力の位置エネルギーが増加する。

非保存力がはたらいているとき

保存力の位置エネルギーは保存力がした仕事の分だけ失われるだけである。

よって，式①が成り立つ。

$U_1-W=U_2$ ・・・①

一方，運動エネルギーは保存力，非保存力の区別なく，もらった仕事の分だけ変化するから，

非保存力の仕事を W_F とすると，

$K_1+W+W_F=K_2$ ・・・③

となる。

①＋③より，

$U_1+K_1+W_F=U_2+K_2$

すなわち，

位置エネルギーと運動エネルギーの和は，物体が受けた非保存力の仕事の分だけ変化する。