

41. 斜面をもつ台上の小球の運動

力学的エネルギー保存則が成り立つ状況

摩擦のない系における斜面台と斜面上の物体の運動を例に

斜面台と物体には重力（保存力）と垂直抗力（非保存力）が働く。

力学的エネルギーが保存される状況 1：保存力だけが仕事をするとき

斜面台が固定されている場合がこれに当たる。

斜面台が固定されているとき、物体の変位と垂直抗力のなす角は 90° であり、仕事は力ベクトルと変位ベクトルの内積だから、垂直抗力の仕事は 0 である。

一方、物体に働く重力の向きと物体の運動の向きは垂直ではない。

したがって、物体に仕事をするのは重力（保存力）だけである。

保存力とは空間中の物体の位置で決まる力で、場を支配する力である。

たとえば、重力、万有引力、静電気力、弾性力などがそうである。

保存力でない力は「保存力に非ずの力」だから、「非保存力」と呼ばれる。

たとえば、摩擦力などの抵抗力、垂直抗力、手による外力などがそうである。

物体がある位置にあるとき、その物体は保存力の仕事をすることができる。

このとき物体は（保存力の）位置エネルギーをもっていて、

その物体に対し保存力が仕事をすると、した仕事だけ物体の位置エネルギーが減少する。

よって、位置エネルギー変化 $= -1 \times$ 保存力の仕事 $\dots \textcircled{1}$

一方、物体の運動エネルギーはされた仕事だけ増える。

したがって、保存力だけが仕事をするとき、

運動エネルギー変化 $=$ 保存力の仕事 $\dots \textcircled{2}$

よって、保存力だけが仕事をする場合、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より、

物体の力学的エネルギー変化 $=$ 位置エネルギー変化 $+ 運動エネルギー変化 = 0$

また、斜面台は固定されているから、斜面台の力学的エネルギー変化 $= 0$

ゆえに、保存力だけが仕事をするとき、系の力学的エネルギーは保存される。

力学的エネルギーが保存される状況 2：非保存力の仕事の和が 0 になるとき

斜面台が動く場合がこれに当たる。

物体（質量 m ）と斜面台（質量 M ）がともに静止状態から運動を始めたとき、

地上で静止している観測者から見た運動中の物体と斜面台（以後「台」）のそれぞれの（速度の水平成分、速度の鉛直成分）を (v_x, v_y) 、 $(V, 0)$ とする。

また、斜面の傾角を α とする。

台とともに運動している観測者から見た物体の速度（相対速度）は、

$(v_x - V, v_y)$ であり、この観測者から見ると物体は傾角 α の斜面を滑り降りるから、

$$\left| \frac{v_y}{v_x - V} \right| = \tan \alpha \text{ となる。}$$

一方、地上で静止している観測者から見た物体の降下角度を β とすると、

$$\tan \beta = \left| \frac{v_y}{v_x} \right| \text{ である。}$$

ここで、水平方向の運動量保存則より $mv_x + MV = 0$ が成り立つから、 v_x と V の正負は異なる。

$$\text{よって、} |v_x| < |v_x - V|$$

補足

$$\text{具体的には、} mv_x + MV = 0 \text{ より、} V = -\frac{m}{M}v_x$$

$$\therefore |v_x - V| = \left| v_x - \left(-\frac{m}{M}v_x \right) \right| = \left| \left(1 + \frac{m}{M} \right) v_x \right| > |v_x|$$

$$\text{ゆえに、} \left| \frac{v_y}{v_x - V} \right| < \left| \frac{v_y}{v_x} \right| \text{ より、} \tan \alpha < \tan \beta \quad \text{すなわち} \alpha < \beta$$

物体に働く垂直抗力は傾斜角 α の斜面に垂直だから、

その垂直抗力と地表から見た物体の変位のなす角は $\frac{\pi}{2}$ より大きい。

補足

$$\text{なす角は} \frac{\pi}{2} + (\beta - \alpha) \text{ である。}$$

よって、垂直抗力は物体に対して負の仕事をする。

一方、台に働く垂直抗力と台の変位のなす角は $\frac{\pi}{2}$ より小さい。

補足

$$\text{なす角は} \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ である。}$$

よって、垂直抗力は台に対して正の仕事をする。

定量的に扱えば、これらの仕事の和が 0 になる。

また、台には床からの垂直抗力も働くが、それは台の運動方向と垂直だから、その仕事は 0 である。

以上より、非保存力の正味の仕事は 0 となり、

力学的エネルギー保存則が成り立つ。