43. 棒でつながれた 2 物体の運動

(1)

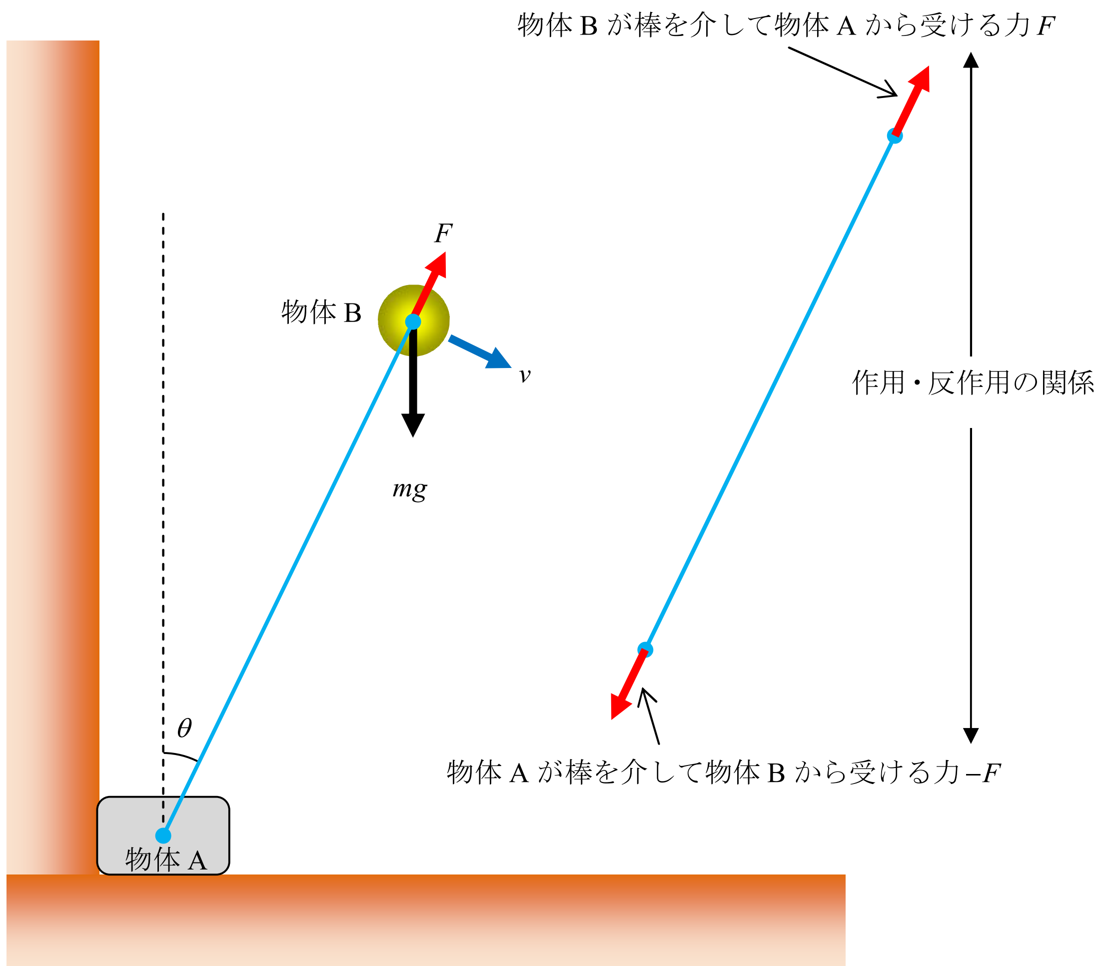
物体 A と棒の接続点の高さを 0 とする。

力学的エネルギー保存則より， $mgl = \frac{1}{2}mv^2 + mgl\cos\theta$

よって， $v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$ ・・・(答)

(2)

物体 A が壁に接するためには，棒は物体 A を左下に押さなければならない。
このとき棒は物体 A から右上にその反作用の力を受ける。
ところが棒には質量がないから，これは本質的には物体 A と物体 B の作用・反作用である。
離れた 2 物体間の作用反作用の関係の 1 つといったところでしょうか。
よって，物体 B は棒を介して物体 A から反作用力 F を右上に受けることになる。



物体 B に働く向心力＝ $mg\cos\theta - F$ より，

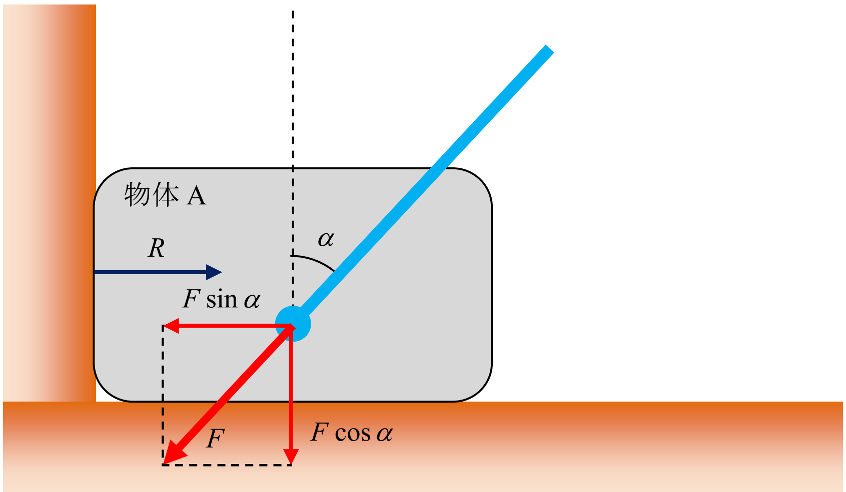
物体 B の運動方程式は， $\dfrac{mv^2}{l} = mg\cos\theta - F$

(1)より $mv^2 = 2mgl(1-\cos\theta)$

よって， $2mg(1-\cos\theta) = mg\cos\theta - F$

$\therefore F = mg(3\cos\theta - 2)$ ・・・(答)

(3)



壁からの垂直抗力を R とすると，

物体 A に働く力の壁に垂直な成分のつり合いより， $R = F\sin\theta$

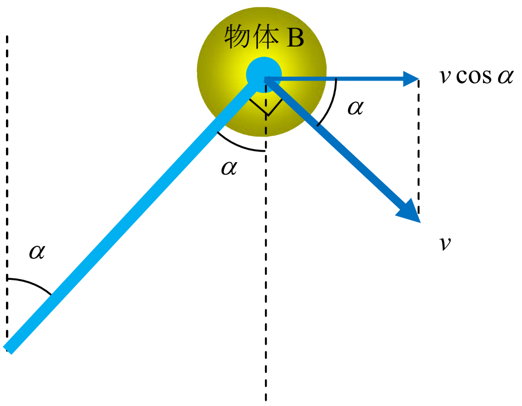
物体 A が壁から離れるとき， $R = 0$ となるから， $0 = F\sin\alpha$

$\therefore mg(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha = 0$　$\sin\alpha \neq 0$ より， $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ ・・・(答)

(4)

$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ および $v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$ より， $v = \sqrt{\dfrac{2gl}{3}}$

下図より， $P = mv\cos\alpha$　$\therefore P = \dfrac{2m}{3}\sqrt{\dfrac{2gl}{3}}$ ・・・(答)



(5)

(2)，(3)の解説図より，

物体 A の運動量を変化させる力積は$-F\sin\theta\cdot\Delta t$

物体 B の水平方向の運動量を変化させる力積は$F\sin\theta\cdot\Delta t$

力積の和＝0 より，物体 A と物体 B の水平方向の運動量の和が保存される。

また，

物体 B が物体 A の真横（$\theta=90°$）にきたとき，

物体 A から見ると物体 B の速度の向きは床と垂直の向きになるから，

物体 A から見た物体 B の水平方向の速度は 0 である。

よって，右向きを正とすると，物体 B の水平方向の速度＝物体 A の速度＝V

以上より，

$\theta=\alpha$ と $\theta=90°$ の運動量について，$P+0=mV+MV$ が成り立つ。

$$\therefore V=\frac{P}{m+M}$$ ・・・(答)

(6)

水平方向の運動量保存則

最高点に達したとき，物体 A から見ると物体 B は静止する。

したがって，このときの物体 A の速度をV'とすると，

物体 B の速度＝物体 A の速度＝V'

また，(5)で説明したように，運動量が保存されるから，

$P=mV+MV=mV'+MV' \quad \therefore V'=V$ ・・・①

力学的エネルギー保存則

物体 B は床と完全弾性衝突するから，衝突前後の力学的エネルギーは保存される。

よって，

$$mgl=\frac{1}{2}MV'^2+\frac{1}{2}mV'^2+mgl\cos\beta$$ ・・・②

①，②より，

$$mgl=\frac{1}{2}(m+M)V^2+mgl\cos\beta$$

$$(m+M)mgl=\frac{1}{2}(m+M)^2V^2+(m+M)mgl\cos\beta$$

$$(m+M)mgl=\frac{1}{2}P^2+(m+M)mgl\cos\beta$$

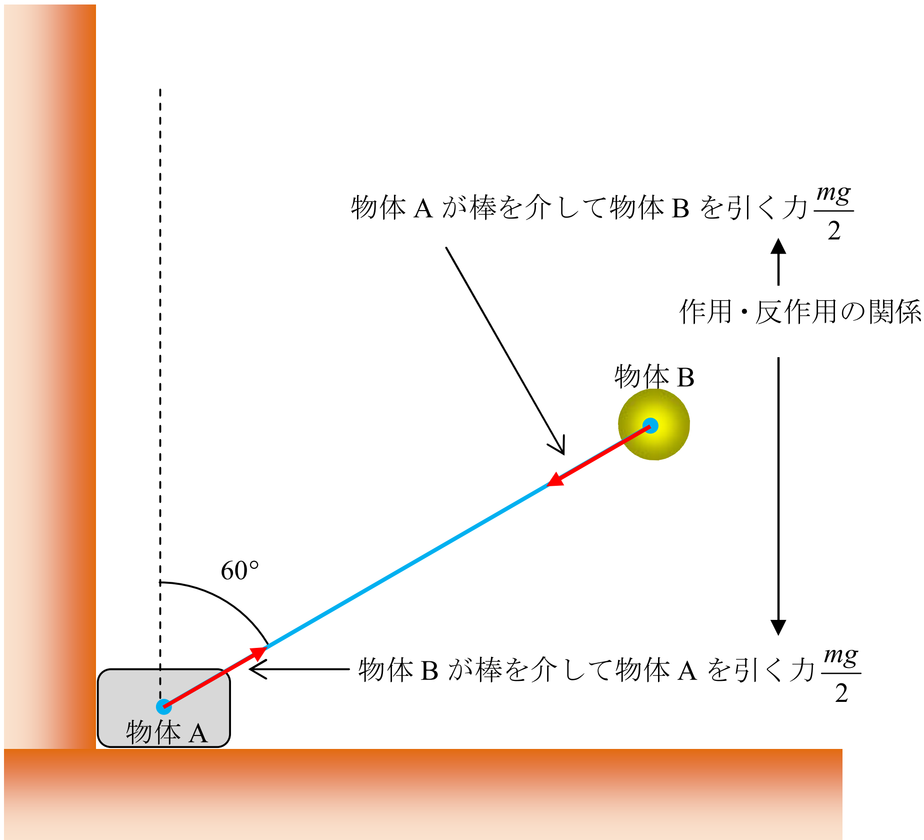
$$\cos\beta=1-\frac{P^2}{2m(m+M)gl}$$ ・・・(答)

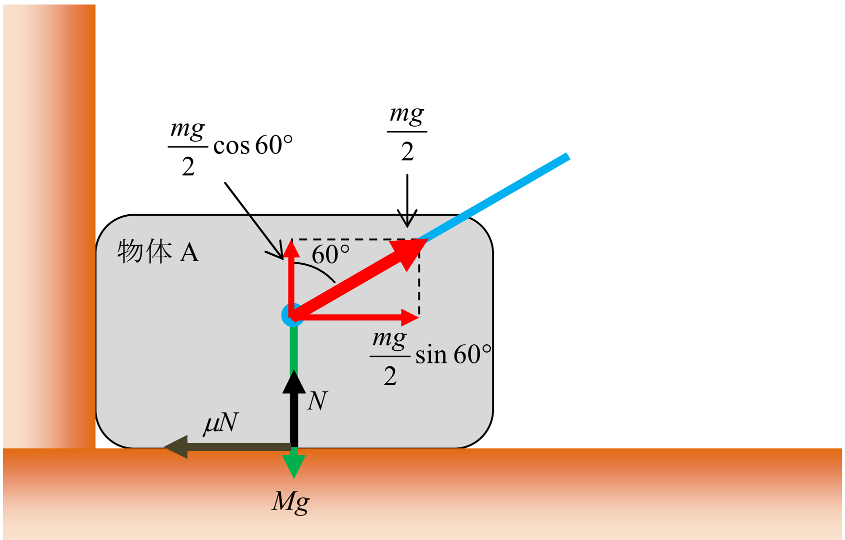
(7)

(3)より $F = mg(3\cos\theta - 2)$

これと $\theta = 60°$ より， $F = -\dfrac{mg}{2}$

つまり，下図のように，棒を介して押し合う関係の力が引き合う関係の力になる。





物体 A が床から受ける垂直抗力を N とすると，

床と垂直方向の力のつり合い

$$N+\frac{mg}{2}\cos 60° = Mg \quad \therefore N = Mg-\frac{mg}{4} \quad ・・・③$$

水平方向の力のつり合い

壁から離れるときの壁面からの垂直抗力は 0 だから，

$$\mu N = \frac{mg}{2}\sin 60° \quad \therefore \mu = \frac{\sqrt{3}mg}{4N} \quad ・・・④$$

③，④より，

$$\mu = \frac{\sqrt{3}mg}{4\left(Mg-\frac{mg}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}m}{4M-m} \quad ・・・（答）$$

(1)の補足

棒が物体 A に作用する力の向きは常に物体 A の運動方向と垂直だから，

棒が物体 A の運動の向きにする仕事は 0 である。

したがって，物体 A の運動エネルギー変化に棒がする仕事は寄与しない。

一方，物体 A に働く重力の向きと物体 A の運動の向きとのなす角が ϕ から $d\phi$ 微小変化したとき，重力が物体 A にする微小の仕事を dW とすると，

$d\phi = \lim_{\Delta\phi \to 0} \Delta\phi$ より，重力の物体 A の運動方向の成分は $mg\sin\phi$ としてよいから，

$dW = mg\sin\phi \cdot l \cdot d\phi$

よって，重力が物体 A の運動の向きにした仕事を W とすると，$W > 0$ より，

$$W = |W| = \left|\int_\theta^0 dW\right| = \left|\int_\theta^0 mgl\sin\phi d\phi\right| = \left|mgl[-\cos\phi]_\theta^0\right| = mgl(1-\cos\theta)$$

したがって，物体 A の運動エネルギーと仕事の関係式は $0 + mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2$

ゆえに，$v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$