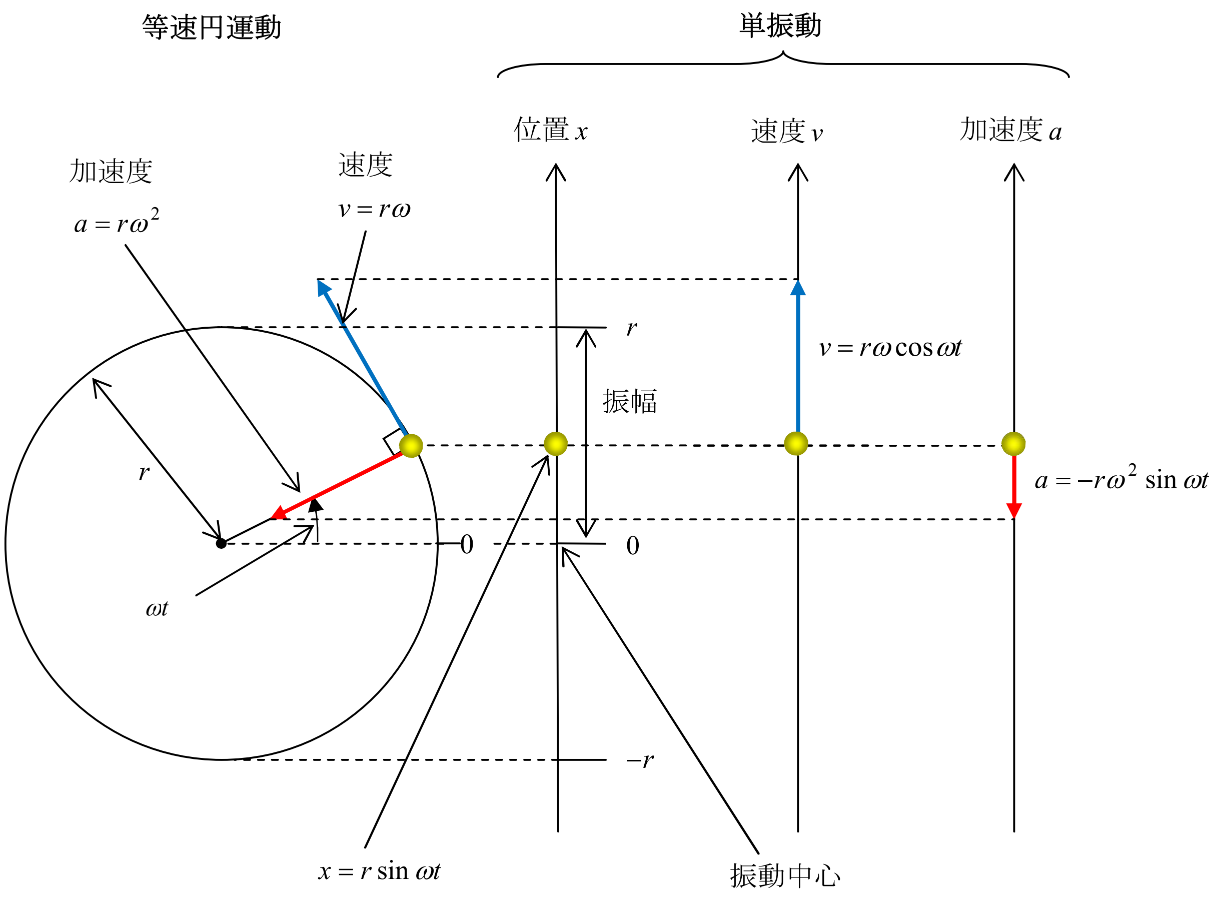
# 51.　2 本のばねによる単振動

## 等速円運動と単振動

単振動は等速円運動をしている質点の運動を直線上に投影した運動とみなせる。




回転軌道半径が $r$ の等速円運動を直線上に投影すると，

位置：$x=r\sin\omega t$

　　初期位相（等速円運動開始時（$t=0$）の角度）が $\varphi$ ならば，$x=r\sin(\omega t+\varphi)$

速度：$v=r\omega\cos\omega t$

　　初期位相が $\varphi$ ならば，$v=r\omega\cos(\omega t+\varphi)$

加速度：$a=-r\omega^2\sin\omega t=-\omega^2 x$

　　初期位相が $\varphi$ ならば，$a=-r\omega^2\sin(\omega t+\varphi)=-\omega^2 x$

これらが，単振動している物体の位置，速度，加速度である。

尚，振動中心は，単振動している物体の振動方向にはたらく外力がつり合う位置である。

補足

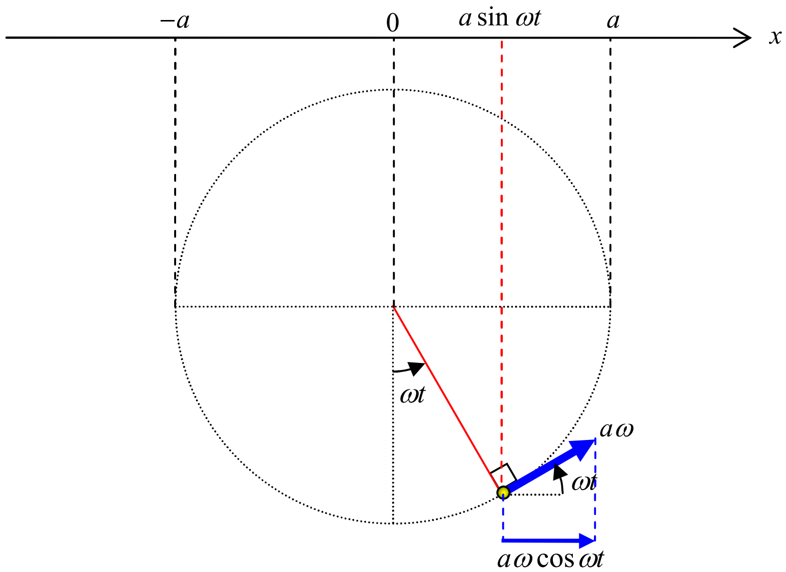
三角関数の微分を学習済みなら，初期位相を $\varphi$，角速度（角振動数）を $\omega$ とすると，

$$x = r\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\sin(\omega t + \varphi)) = r\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega\cos(\omega t + \varphi)) = -r\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

**(1)**




等速円運動している物体の位置と速度の右向きを正とする水平成分をとることにより，

$x = a\sin\omega t \quad (\omega > 0)$ ・・・(答)

$v = a\omega\cos\omega t \quad (\omega > 0)$ ・・・(答)

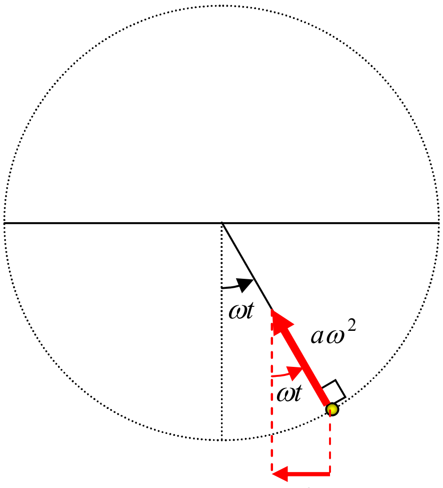
**(2)**

加速度 $\alpha$

等速円運動の中心方向の加速度の水平成分 $\alpha$ を右向きを正としてとると，

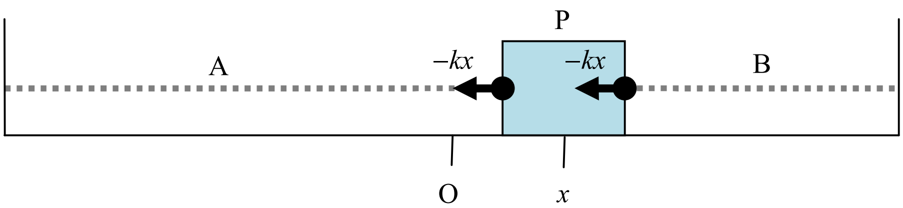
$\alpha = -a\omega^2 \sin \omega t$

これと，$x = a \sin \omega t$ より，$\alpha = -\omega^2 x$ ・・・(答)




力 $\boldsymbol{F}$

下図より，$F = -2kx$ ・・・(答)




**(3)**

物体 P の運動方程式は $m\alpha = F$

これと $\alpha = -\omega^2 x,\ F = -2kx$ より，$m \cdot \left(-\omega^2 x\right) = -2kx \quad \therefore\ \omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

よって，物体 P の単振動は，軌道半径 $a$，角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ の等速円運動と対応する。

$x = a$ に達してから初めて原点 O を通過するまでの時間 $t_0$

等速円運動に置き換えると，回転角が $\dfrac{\pi}{2}$ だから，$\omega t_0 = \dfrac{\pi}{2} \quad \therefore t_0 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ ・・・(答)

$x = a$ に達してから初めて $x = \dfrac{a}{2}$ を通過するまでの時間 $t_1$

等速円運動に置き換えると，回転角が $\dfrac{\pi}{3}$ だから，$\omega t_1 = \dfrac{\pi}{3} \quad \therefore t_1 = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ ・・・(答)

**(4)**

運動エネルギーの最大値

$|v| = |a\omega\cos\omega t| = a\omega|\cos\omega t| \quad (\because \omega > 0)$ より，

$\omega t = n\pi \ (n = 0,1,2,\cdots)$ のとき，$|v|$ は最大値 $a\omega$ をとる。

よって，

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m\cdot(a\omega)^2 \\
&= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}ma^2\cdot\frac{2k}{m} \quad \left(\because \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}\right) \\
&= ka^2
\end{aligned}
$$

また，このとき $x = a\sin\omega t = a\sin(n\pi) = 0$

ゆえに，$x = 0$ の位置で運動エネルギーは最大値 $K = ka^2$ をとる。　・・・(答)

位置エネルギーの最大値

保存力は，ばねの弾性力のみだから，

位置エネルギーは弾性力による位置エネルギーである。

これと合成ばね定数＝$2k$ より，位置エネルギー＝$\frac{1}{2}(2k)x^2 = kx^2$

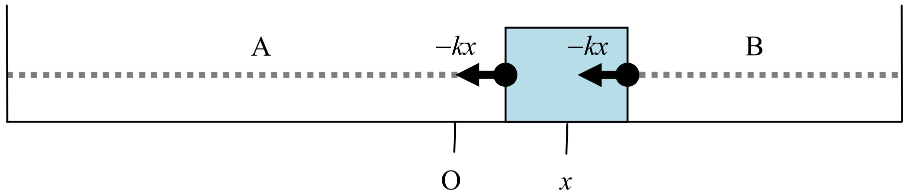
$|x| = a|\sin\omega t|$ より，$\omega t = n\pi + \frac{\pi}{2} \ (n = 0,1,2,\cdots)$ のとき，$|x|$ は最大値 $a$ をとるから，

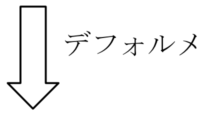
位置エネルギーの最大値 $U = ka^2$

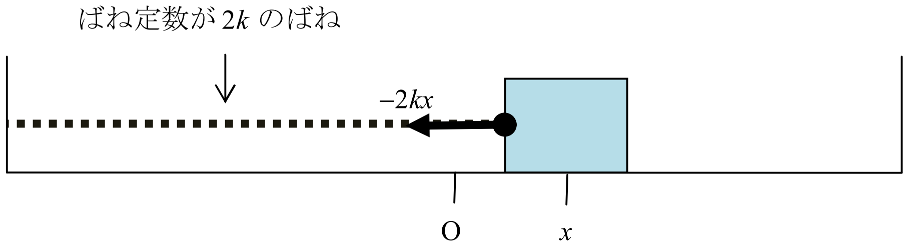
よって，$x = \pm a$ の位置で位置エネルギーは最大値 $U = ka^2$ をとる。　・・・(答)

補足

物体 P が受ける弾性力については，次のようにデフォルメするとわかりやすい。




あるいは，