57. 惑星のトンネル

(4)・(5)

$-R \leq x \leq R$ において，物体 A に働く外力 $f = -\frac{4}{3}\pi\rho Gmx$ だから，

$x < 0$ のとき $f > 0$，つまり物体 A に働く外力は $x = 0$ の向き，$x = 0$ のとき $f = 0$，

$x > 0$ のとき $f < 0$，つまり物体 A に働く外力は $x = 0$ の向きとなり，

物体 A は常に $x = 0$ の向きに，x の大きさに比例した大きさの外力（復元力）を受ける。

したがって，その運動は単振動である。

(6)

物体 A の加速度を a とすると，その単振動の運動方程式は $ma = -\frac{4}{3}\pi\rho Gmx$

これを単振動の運動方程式の一般形 $ma = -KX$ と対応させると，$K = \frac{4}{3}\pi\rho Gm$，$X = x$ より，

物体 A の単振動は振動中心が $x = 0$，周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\rho Gm}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$ である。

よって，$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$

また，単振動の力学的エネルギー保存則の式 $\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = $ 一定 より，

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho Gm\cdot R^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \therefore v_1 = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$ ・・・(答)

あるいは，振動中心の速さ $v_1 = R\omega = R\cdot\frac{2\pi}{T} = 2\pi R\sqrt{\frac{\rho G}{3\pi}} = 2R\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$ ・・・(答)

(7)

$-R \leq x \leq R$ では，単振動運動の力学的エネルギーが保存されるから，

物体が惑星 Q の表面に達したときの速さを v_3 とすると，$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}KR^2 + \frac{1}{2}mv_3^2$ ・・・①

$R \leq x$ では，万有引力の力学的エネルギーが保存されるから，

$\frac{1}{2}mv_3^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0 + \left(-\frac{GMm}{3R}\right) \quad \therefore \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{2GMm}{3R}$ ・・・②

①，②より，$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}KR^2 + \frac{2GMm}{3R}$

これと $K = \frac{4}{3}\pi\rho Gm$，$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ より，

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \sqrt{\frac{KR^2}{m} + \frac{4GM}{3R}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi\rho Gm \cdot R^2}{m} + \frac{4G \cdot \frac{4}{3}\pi\rho R^3}{3R}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi\rho GR^2}{3} + \frac{16\pi\rho GR^2}{9}} \\
&= \sqrt{\frac{28\pi\rho GR^2}{9}} \\
&= \sqrt{\frac{4R^2}{9} \cdot 7\pi\rho G}
\end{aligned}
$$

よって，$v_2 = \dfrac{2R}{3}\sqrt{7\pi\rho G}$　・・・(答)