58. ばねに連結された 2 物体

(2)

ばねの弾性力を f とすると，

A の運動方程式は， $m_{\mathrm{A}} a_{\mathrm{A}} = f$ ・・・①

B の運動方程式は， $m_{\mathrm{B}} a_{\mathrm{B}} = -f$ ・・・②

①＋②より， $m_{\mathrm{A}} a_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} a_{\mathrm{B}} = 0$

よって， $m_{\mathrm{A}} a_{\mathrm{A}} t + m_{\mathrm{B}} a_{\mathrm{B}} t = 0$ より， $m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}} = 0$ ・・・③

力学的エネルギーが保存されるから， $\dfrac{1}{2}k(L-l)^2 = \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{A}} {v_{\mathrm{A}}}^2 + \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{B}} {v_{\mathrm{B}}}^2$

$\therefore m_{\mathrm{B}} k(L-l)^2 = m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}} {v_{\mathrm{A}}}^2 + {m_{\mathrm{B}}}^2 {v_{\mathrm{B}}}^2$ ・・・④

③より， ${m_{\mathrm{B}}}^2 {v_{\mathrm{B}}}^2 = {m_{\mathrm{A}}}^2 {v_{\mathrm{A}}}^2$ だから，これを④に代入して，

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{B}} k(L-l)^2 &= m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}} {v_{\mathrm{A}}}^2 + {m_{\mathrm{A}}}^2 {v_{\mathrm{A}}}^2 \\ &= m_{\mathrm{A}}(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}) {v_{\mathrm{A}}}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore v_{\mathrm{A}} = (L-l)\sqrt{\frac{k m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})}} \qquad (\because v_{\mathrm{A}} > 0)$$

これと③より， $v_{\mathrm{B}} = -(L-l)\sqrt{\dfrac{k m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})}}$

(3)

重心の公式より， $x_{\mathrm{G}} = \dfrac{m_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} x_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$

(4)

A の運動方程式は， $m_{\mathrm{A}} a_{\mathrm{A}} = kX$ ・・・⑤

B の運動方程式は， $m_{\mathrm{B}} a_{\mathrm{B}} = -kX$ ・・・⑥

(5)

⑤より $a_{\mathrm{A}} = \dfrac{k}{m_{\mathrm{A}}}X$ ，⑥より $a_{\mathrm{B}} = -\dfrac{k}{m_{\mathrm{B}}}X$

よって， $a = a_{\mathrm{B}} - a_{\mathrm{A}} = -\dfrac{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}} \cdot kX$ より， $\dfrac{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} a = -kX$ ゆえに， $M = \dfrac{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$

単振動の運動方程式 $Ma = -kX$ より，周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ だから，

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{k}{\dfrac{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}}} = \sqrt{\frac{k(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})}{m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}}}$$

(6)

運動方程式$Ma=-kX$ $\left(M=\dfrac{m_A m_B}{m_A+m_B}\right)$について

加速度aは物体Aから見た物体Bの加速度である。

$-kX$ は、Xが物体 A から見た物体 B のつり合いの位置（自然長）からの変位 $X=x_B-(x_A+l)$より，物体Aから見たときの物体Bが受ける復元力である。

また，質量M $\left(M=\dfrac{m_A m_B}{m_A+m_B}\right)$は物体Aから見た物体Bの質量であり，

この質量$\dfrac{m_A m_B}{m_A+m_B}$を換算質量という。

したがって，$Ma=-kX$は物体Aから見た物体Bの単振動の運動方程式である。

物体Aから見た物体Bの単振動運動の振幅

物体Bが単振動開始した位置は物体Aから見て$(x_A+L)-x_A=L$の位置，

振動中心，すなわちつり合いの位置は物体Aから見て$(x_A+l)-x_A=l$の位置である。

よって，物体Aから見た物体Bの振幅は$L-l$

（振幅は直感的にすぐ$L-l$と出るが，あえて細かく相対的位置関係から求めた）

物体Aから見た物体Bの単振動運動の式

初期位相をαとすると，$X=(L-l)\sin(\omega t+\alpha)$，

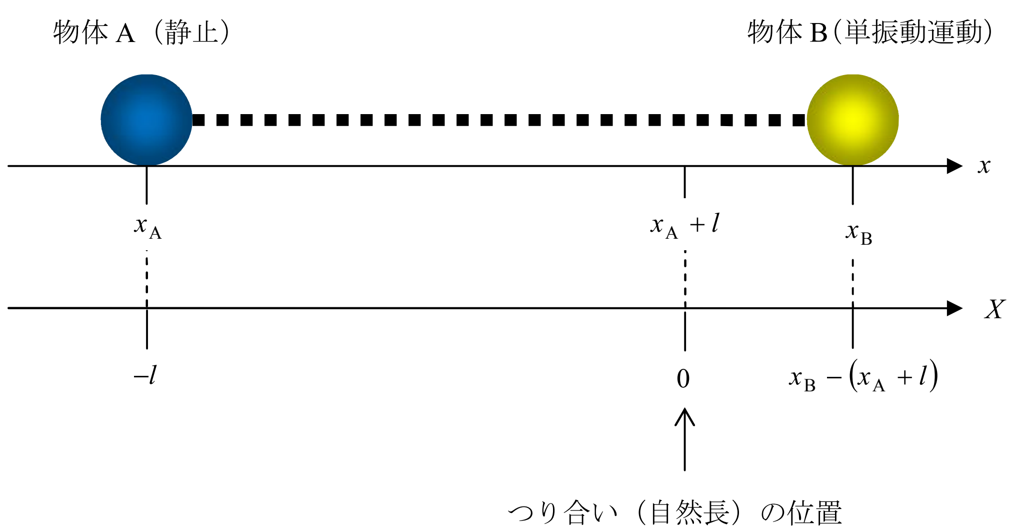
物体Aから見た物体Bの速度$v=\dfrac{dX}{dt}=(L-l)\omega\cos(\omega t+\alpha)$

条件より，$t=0$のとき，$X=0$，$v=-(L-l)\omega$だから，

$0=(L-l)\sin\alpha$，$-(L-l)\omega=(L-l)\omega\cos\alpha$ 　　$\therefore \alpha=\pi$

ゆえに，物体Aから見た物体Bの単振動の式は$X=(L-l)\sin(\omega t+\pi)$

$\therefore X=-(L-l)\sin\omega t$ 　・・・(答)



$X = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} - l$ より，$x_{\mathrm{B}} = X + x_{\mathrm{A}} + l$　・・・⑦

$x_{\mathrm{G}} = \dfrac{m_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} x_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$ より，$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})x_{\mathrm{G}} = m_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} x_{\mathrm{B}}$　・・・⑧

⑦，⑧より，$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})x_{\mathrm{G}} = m_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}(X + x_{\mathrm{A}} + l)$

これより，$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})x_{\mathrm{A}} = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})x_{\mathrm{G}} - m_{\mathrm{B}} X - m_{\mathrm{B}} l$

よって，$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{G}} - \dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} l - \dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} X$

これに $X = -(L - l)\sin \omega t$ を代入することにより，

$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{G}} - \dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} l + \dfrac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} (L - l)\sin \omega t$　・・・(答)

換算質量と作用反作用または内力による 2 物体の運動

ばねに連結された質量 m_{A} の質点 A と質量 m_{B} 質点 B が単振動運動しているとき，
地上の観測者が，弾性力の大きさを $|f|$，それぞれの加速度を a_{A}，a_{B} として，
それぞれの運動方程式を立てると，

$$m_{\mathrm{A}}a_{\mathrm{A}} = f \Leftrightarrow m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{B}} = -f$$

である。

よって，$a_{\mathrm{A}} = \dfrac{f}{m_{\mathrm{A}}}$，$a_{\mathrm{B}} = -\dfrac{f}{m_{\mathrm{B}}}$ となる。

では，質点 A から見た質点 B の運動方程式はどうなるかというと，
質点 A から見た質点 B の加速度は，

$$a_{\mathrm{B}} - a_{\mathrm{A}} = -\frac{f}{m_{\mathrm{B}}} - \frac{f}{m_{\mathrm{A}}} = -\frac{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}f$$

質点 A から見ても質点 B が外力 $-f$ を受けていることに変りないから，
質点 A から見た質点 B の運動方程式は，

$$\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\left(a_{\mathrm{B}} - a_{\mathrm{A}}\right) = -f$$

となる。

つまり，質点 A から質点 B を見ると，

質量 $\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$ の質点が外力 $-f$ を受けて加速度 $a_{\mathrm{B}} - a_{\mathrm{A}}$ の単振動運動している。

逆に，質点 B から質点 A を見ると，

$a_{\mathrm{A}} - a_{\mathrm{B}} = \dfrac{f}{m_{\mathrm{A}}} + \dfrac{f}{m_{\mathrm{B}}} = \dfrac{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}f$ より，

質点 B から見た質点 A の運動方程式は，

$$\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\left(a_{\mathrm{A}} - a_{\mathrm{B}}\right) = f$$

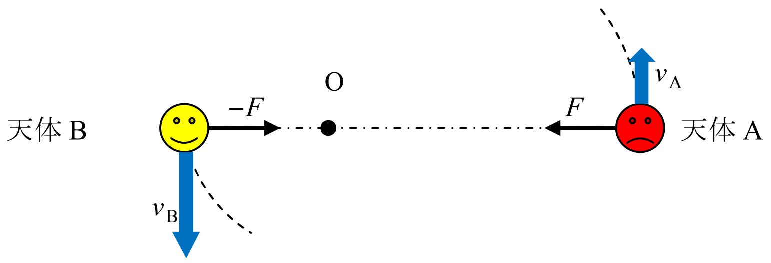
つまり，質点 B から質点 A を見ると，

質量 $\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$ の質点が外力 f を受けて加速度 $a_{\mathrm{A}} - a_{\mathrm{B}}$ で単振動運動している。

このように，2 物体が作用反作用の関係の外力または内力によって運動しているとき，
相対運動の運動方程式を立てると現れる $\dfrac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$ のような質量を換算質量という。

例

万有引力で互いのまわりを回る 2 つの天体の運動



質量 m_A の天体 A と質量 m_B の天体 B が，

重心 O を中心に互いのまわりを等速円運動しているものとする。

向心力は万有引力であり，天体 A と天体 B の作用反作用の力であるから，

天体 A が天体 B から受ける万有引力を F とすると，

天体 B が天体 A から受ける万有引力は $-F$ である。

天体 A，B の向心加速度をそれぞれ a_A， a_B とすると，

天体 A の運動方程式は， $m_A a_A = F$

天体 B の運動方程式は， $m_B a_B = -F$

となる。

よって，

$$a_A = \frac{F}{m_A} \quad ・・・①$$

$$a_B = -\frac{F}{m_B} \quad ・・・②$$

天体 B から見た天体 A の加速度は，

①－②より，

$$a_A - a_B = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B} F$$

天体 B から見ても天体 A に働く外力は万有引力 F だから，

天体 B から見た天体 A の運動方程式は，

$\dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}(a_A - a_B) = F$ となる。

よって，

天体 B から見ると，質量 $\dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ の天体 A が，天体 B からの万有引力 F を受けて，

天体 B のまわりを向心加速度 $a_A - a_B$ で等速円運動していることになる。

天体 B から見た天体 A の運動