77. 水流があるときの水面波

[B]

(1)

補足 1

原点で観測される振動数が波源の振動数と同じであることについて

波源 S が時刻 0 秒から時刻 1 秒までの 1 秒間振動すると，f 個の波ができる。

このとき，最初の波の先端が原点 O に到着する時刻は $\dfrac{h}{\sqrt{c^2-V^2}}$ 秒

f 番目の波の先端が原点 O に到着する時刻は $1+\dfrac{h}{\sqrt{c^2-V^2}}$ 秒

よって，原点で f 個の波を検出した時間は，$\left(1+\dfrac{h}{\sqrt{c^2-V^2}}\right)-\dfrac{h}{\sqrt{c^2-V^2}}=1$

ゆえに，原点 O で観測される振動数も f である。

一方，原点 O に向かう波の波長 λ' については，

$\sqrt{c^2-V^2}$ m あたりの波の数が f だから，$\lambda'=\dfrac{\sqrt{c^2-V^2}}{f}$

補足 2

波面の方程式と任意の観測点に波面の到達する時刻および観測される波の速さ

波面の中心は $\mathrm{S}(0,\ h)$ から x 軸方向に速度 V で移動し，

波面は波面の中心から速さ c でその半径を広げていくから，

（輪が速度 V の水流に運ばれながらその半径を速さ c で大きくしていくイメージ）

波面が生じた時刻を 0 とすると，時刻 t の波面の方程式は $(x-Vt)^2+(y-h)^2=(ct)^2$

したがって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に波面が到達する時刻は，

$(x-Vt)^2+(y-h)^2=(ct)^2$ を t $(t\geq 0)$ の方程式とし，これを解けばよい。

すなわち，$(x-Vt)^2+(y-h)^2=(ct)^2$ より $(c^2-V^2)t^2+2xVt-\left\{x^2+(y-h)^2\right\}=0$

これと $t\geq 0$ より，$t=\dfrac{-xV+\sqrt{x^2V^2+(c^2-V^2)\left\{x^2+(y-h)^2\right\}}}{c^2-V^2}$

よって，原点 O に波面が到達する時刻は $t=\dfrac{h}{\sqrt{c^2-V^2}}$

また，点 P に至る波の速さを c' とすると $c't=\sqrt{x^2+(y-h)^2}$ より，

$$c'=\frac{(c^2-V^2)\sqrt{x^2+(y-h)^2}}{-xV+\sqrt{x^2V^2+(c^2-V^2)\left\{x^2+(y-h)^2\right\}}}$$ （ただし，点 S を除く）