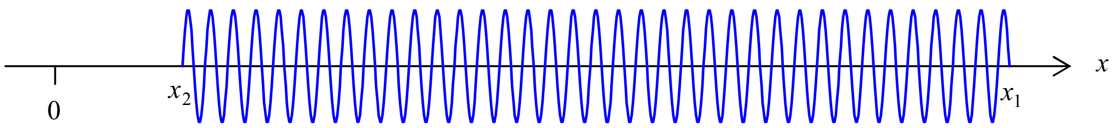
83．観測者と音源が動く場合のドップラー効果

(1)



コウモリが時刻 0 に位置 0 で最初の超音波を発射したとする。

最初の超音波の先端が時刻 Δt_0 に達した位置を x_1 とすると，$x_1 = V\Delta t_0$

時刻 Δt_0 に発射した超音波の後端の位置を x_2 とすると，

x_2 は時刻 Δt_0 におけるコウモリの位置と同じだから，$x_2 = v\Delta t$

よって，$l = x_1 - x_2 = (V - v)\Delta t_0$

(2)

解法 1：ドップラー効果の公式を使う。

ドップラー効果の公式より，$f_1 = \dfrac{V-u}{V-v} f_0$　・・・(答)

コウモリが発した超音波の波数＝ガに当たった超音波の波数より，$f_0\Delta t_0 = f_1\Delta t_1$

よって，$\Delta t_1 = \dfrac{f_0}{f_1}\Delta t_0 = \dfrac{V-v}{V-u}\Delta t_0$　・・・(答)

解法 2：出来事が起こった位置と時刻の関係を式にして解く。

Δt_1 について

ガに最後の超音波が当たった時刻から最初の超音波が当たった時刻を引けばよい。

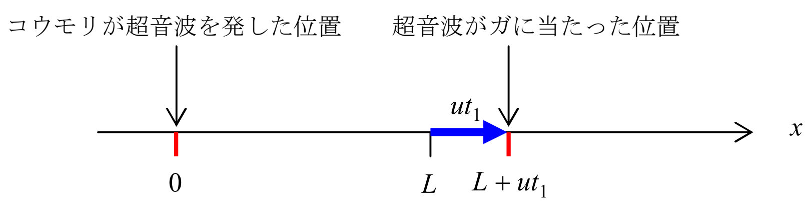
最初の超音波がガに当たった時刻

時刻 0 のコウモリの位置を $x = 0$，ガの位置を $x = L$ とする。

時刻 0 にコウモリが発射した超音波がガに当たった時刻を t_1 とすると，

時刻 t_1 のガの位置 $x = L + ut_1$ より，超音波がガに当たるまでかかった時間は $\dfrac{L+ut_1}{V}$

よって，$t_1 = 0 + \dfrac{L+ut_1}{V}$　$\therefore t_1 = \dfrac{L}{V-u}$　・・・①

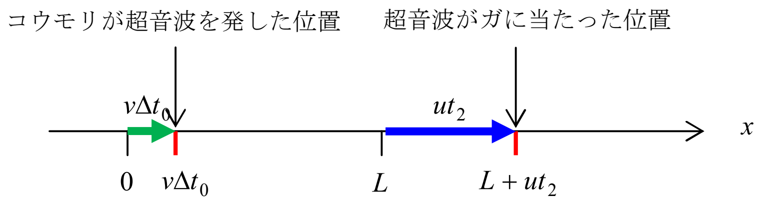


最後の超音波がガに当たった時刻

時刻 Δt_0 にコウモリが発射した超音波がガに当たった時刻を t_2 とすると，

下図より，超音波がガに当たるまでかかった時間は $\dfrac{(L+ut_2)-v\Delta t_0}{V}$ だから，

$$t_2 = \Delta t_0 + \frac{(L+ut_2)-v\Delta t_0}{V} \qquad \therefore t_2 = \frac{L+(V-v)\Delta t_0}{V-u} \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$



①，②より，$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \dfrac{V-v}{V-u}\Delta t_0 \qquad \cdot\cdot\cdot$ (答)

f_1 について

コウモリが発した超音波の波数＝ガに当たった超音波の波数より，

$f_0 \Delta t_0 = f_1 \Delta t_1$

$$\therefore f_1 = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} f_0 = \frac{V-u}{V-v} f_0 \qquad \cdot\cdot\cdot \text{(答)}$$

(3)

解法 **1**：ドップラー効果の公式を使う。

(a)

ドップラー効果の公式より，

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{V+v}{V+u} f_1 \\ &= \frac{V+v}{V+u}\cdot\frac{V-u}{V-v} f_0 \end{aligned}$$

コウモリが発した超音波の波数＝コウモリに当たった反射波の波数より，$f_0\Delta t_0 = f_2 \Delta t_2$

よって，$r = \dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_0} = \dfrac{f_0}{f_2} = \dfrac{(V+u)(V-v)}{(V-u)(V+v)}$

(b)

(a)より，$s = \dfrac{f_2}{f_0} = \dfrac{1}{r}$

解法 2：出来事が起こった位置と時刻の関係を式にして解く。

(a)

ガが最初に反射波を発した時刻を 0，位置を $x=0$ とし，x 軸を左方向にとる。

また，時刻 0 におけるコウモリの位置を $x=L'$ とする。

時刻 0 に発した反射波がコウモリに当たった時刻

時刻 0 に発した反射波がコウモリにあたった時刻を t_3 とすると，

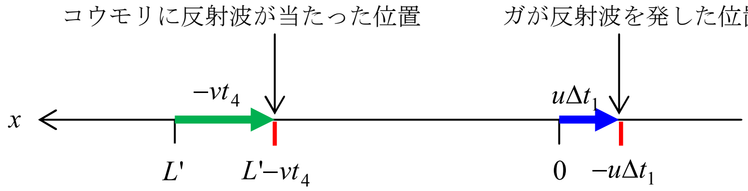
時刻 t_3 のガの位置 $x=L'-vt_3$ より，$t_3=\dfrac{L'-vt_3}{V}$ $\quad\therefore t_3=\dfrac{L'}{V+v}$ ・・・③

最後に発した反射波がコウモリに当たった時刻

最後の反射波，すなわち時刻 Δt_1 の反射波がコウモリに当たった時刻を t_4 とすると，

当たるまでかかった時間は $\dfrac{(L'-vt_4)-(-u\Delta t_1)}{V}$ だから，$t_4=\Delta t_1+\dfrac{L'-vt_4+u\Delta t_1}{V}$

$\therefore t_4=\dfrac{L'+(V+u)\Delta t_1}{V+v}$ ・・・④



③，④より，$\Delta t_2=t_4-t_3=\dfrac{V+u}{V+v}\Delta t_1$

Δt_1 に $\Delta t_1=\dfrac{V-v}{V-u}\Delta t_0$ を代入すると，$\Delta t_2=\dfrac{V+u}{V+v}\cdot\dfrac{V-v}{V-u}\Delta t_0$

$\therefore r=\dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_0}=\dfrac{(V+u)(V-v)}{(V-u)(V+v)}$ ・・・(答)

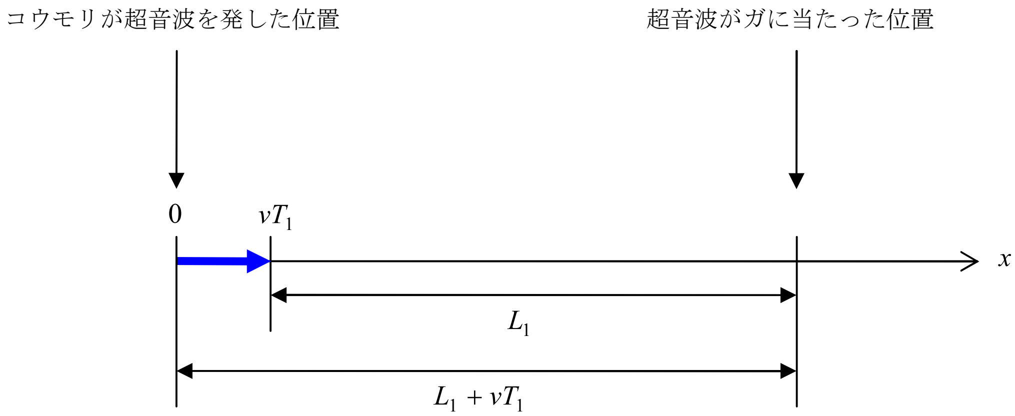
(b)

コウモリが発した超音波の波数＝コウモリに当たった反射波の波数より，

$f_2\Delta t_2=f_0\Delta t_0$ $\quad\therefore s=\dfrac{f_2}{f_0}=\dfrac{\Delta t_0}{\Delta t_2}=\dfrac{1}{r}$ ・・・(答)

(4)

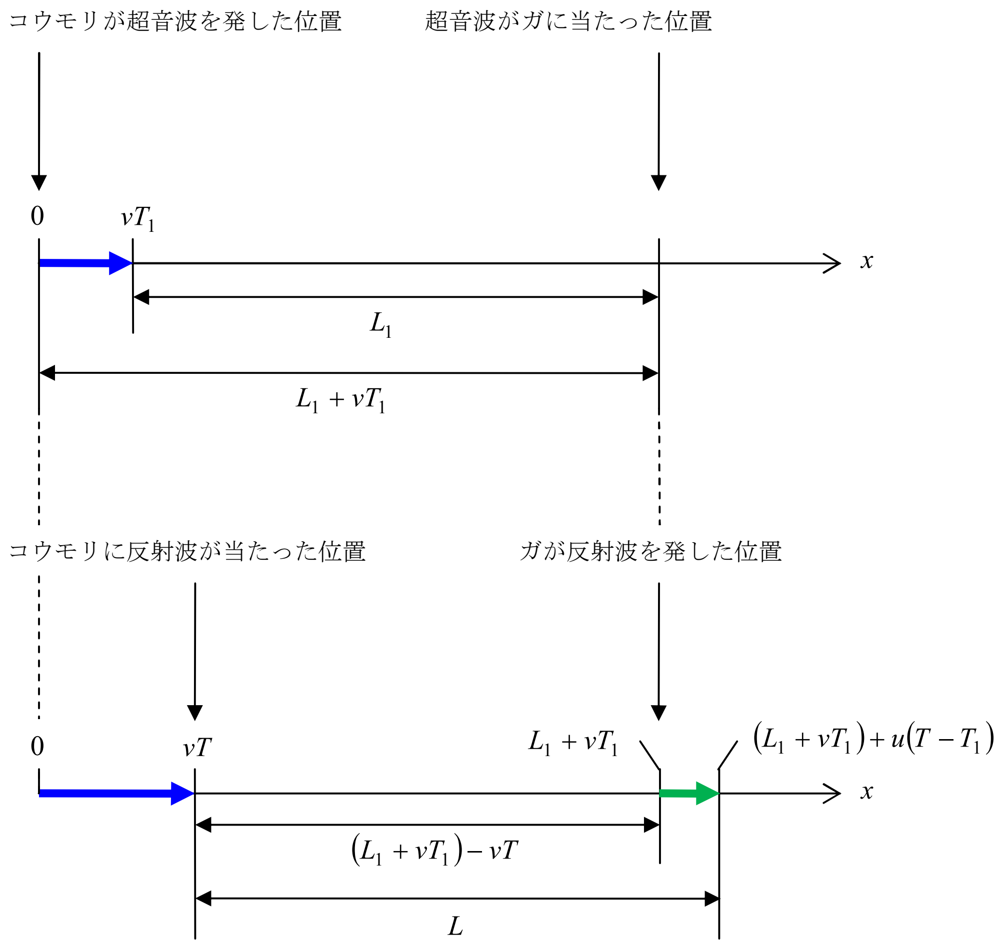
(a)



超音波が速さ V で，時間 T_1 かけて，距離 L_1+vT_1 伝わったから，

$T_1=\dfrac{L_1+vT_1}{V}$ より， $T_1=\dfrac{L_1}{V-v}$ ・・・(答)

(b)



ガが反射波を発してからコウモリに当たるまでの時間＝$T-T_1$ より，
反射波は，速さ V で，時間 $T-T_1$ かけて，距離 $\left(L_1+vT_1\right)-vT$ 伝わったことになる。

よって，$T-T_1=\dfrac{\left(L_1+vT_1\right)-vT}{V}$　$\therefore L_1+(V+v)T_1=(V+v)T$　・・・⑤

また，$T_1=\dfrac{L_1}{V-v}$ より，$L_1=(V-v)T_1$　・・・⑥

⑤，⑥より，$T_1=\dfrac{V+v}{2V}T$，$L_1=\dfrac{(V-v)(V+v)}{2V}T$

よって，

$$
\begin{aligned}
L &= \left\{\left(L_1+vT_1\right)+u\left(T-T_1\right)\right\}-vT \\
&= L_1+(v-u)T_1+(u-v)T \\
&= \frac{(V-v)(V+v)}{2V}T+\frac{(v-u)(V+v)}{2V}T+(u-v)T \\
&= \frac{(V+u)(V-v)}{2V}T
\end{aligned}
$$
・・・(答)