

98. 電場と電位

(1)

$+q$ がつくる点 P の電場を \vec{E}_1 , $-4q$ がつくる点 P の電場を \vec{E}_2 とすると,

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} k_0 \frac{q}{x^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} k_0 \frac{-4q}{\{x - (-a)\}^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

点 P の電場を $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ とすると, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_0 \frac{q}{x^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_0 \frac{-4q}{\{x - (-a)\}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_0 \frac{q}{x^2} - k_0 \frac{4q}{(a+x)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_0 \frac{q(a-x)(a+3x)}{x^2(a+x)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

(2)

電位とは, 単位電荷がもつ静電気力の位置エネルギーのことである。

エネルギーは量 (大きさ) だけをもつから,

電位すなわち単位電荷がもつ静電気力の位置エネルギーは

$+q$ がつくる電場による電位 V_1 と $-4q$ がつくる電場による電位 V_2 の和で与えられる。

$$\text{よって, } V = V_1 + V_2 = k_0 \frac{q}{|x|} + k_0 \frac{-4q}{|x - (-a)|}$$

$$\text{点 P では, } x > 0, \quad x + a > 0 \text{ だから, } V = k_0 \frac{q}{x} - k_0 \frac{4q}{x+a} = k_0 \frac{q(a-3x)}{x(a+x)} \quad \dots \text{(答)}$$

補足

$+q$ がつくる電場 \vec{E}_{x1} の静電気力が単位電荷にする微小の仕事 dW_1 とすると,

$$dW_1 = \vec{E}_{x1} \cdot d\vec{x} = |E_{x1}| |dx| \cos 180^\circ = -|E_{x1}| |dx| = -|E_{x1}| dx \quad \therefore W = -\int_x^\infty |E_{x1}| dx$$

単位電荷が無限遠から点 O に近づくとき, E_{x1} の正負が変化しないから,

$$-\int_x^\infty |E_{x1}| dx = -\left| \int_x^\infty E_{x1} dx \right| \text{ より, } W_1 = -\left| \int_x^\infty E_{x1} dx \right| = -k_0 q \left| \int_x^\infty \frac{1}{x^2} dx \right| = -k_0 q \left[-\frac{1}{x} \right]_x^\infty = -k_0 \frac{q}{|x|}$$

無限遠の単位電荷の位置エネルギー (電位) - 静電気力がする仕事 = 移動後の電位 V_1

より, $0 - \left(-k_0 \frac{q}{|x|}\right) = V_1 \quad \therefore V_1 = k_0 \frac{q}{|x|}$

$-4q$ がつくる電場 \vec{E}_{x2} の静電気力が単位電荷にする微小の仕事 dW_2 とすると,

$$dW_2 = \vec{E}_{x2} \cdot d\vec{x} = |E_{x2}| |dx| \cos 0^\circ = |E_{x2}| |dx| = |E_{x2} dx| \quad \therefore W_2 = \int_x^\infty |E_{x2} dx|$$

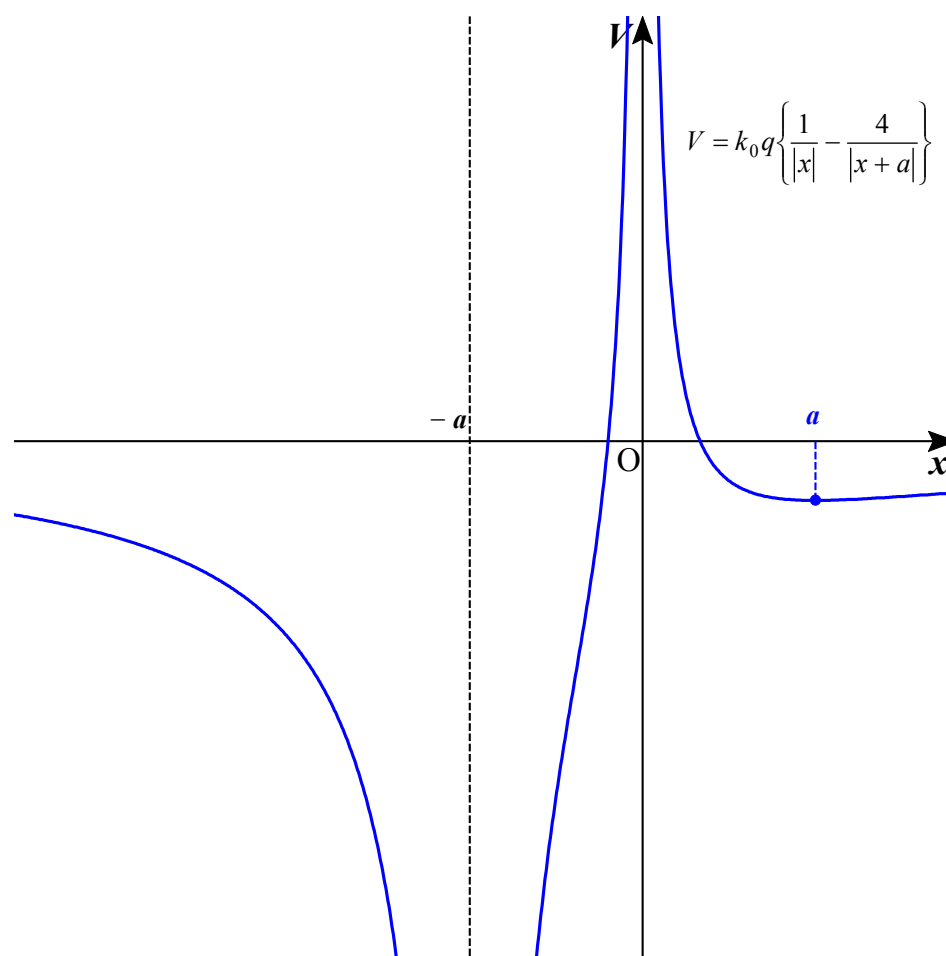
単位電荷が無限遠から点 A に近づくととき, E_{x2} の正負が変化しないから,

$$\int_x^\infty |E_{x2} dx| = \left| \int_x^\infty E_{x2} dx \right|$$

$$\therefore W_2 = \left| \int_x^\infty E_{x2} dx \right| = 4k_0 q \left| \int_x^\infty \frac{1}{(a+x)^2} dx \right| = 4k_0 q \left| \left[-\frac{1}{a+x} \right]_x^\infty \right| = 4k_0 \frac{q}{|a+x|}$$

無限遠の単位電荷の位置エネルギー (電位) - 静電気力がする仕事 = 移動後の電位 V_2

より, $0 - k_0 \frac{4q}{|a+x|} = V_2 \quad \therefore V_2 = -k_0 \frac{4q}{|a+x|}$



(4)

点 R の位置を x_R とすると、題意より、 $a - x_R < 0$

$$\text{よって、} E_{x_R} = k_0 \frac{q(x_R - a)(a + 3x_R)}{x_R^2(a + x_R)} < 0$$

原点に近づく向きに動き始めるから $F = qE_{x_R} < 0$

ゆえに、 $q > 0$ …… (答)

(5)

点 R

点電荷 Q の静電気力の位置エネルギー U_R

$$x \text{ 軸上の電位は(2)より、} k_0 \frac{q(a - 3x)}{x(a + x)}$$

題意より点 R は無限遠として問題ない。

$$\text{よって、} U_R = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ q \cdot k_0 \frac{q(a - 3x)}{x(a + x)} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} k_0 \frac{q^2 \left(\frac{a}{x^2} - \frac{3}{x} \right)}{\frac{a}{x} + 1} = 0$$

点電荷 Q の運動エネルギー K_R

$$K_R = 0$$

原点 O に最も近づいた点を X(X,0) とすると

点電荷 Q の静電気力の位置エネルギー U_X

$$U_X = k_0 \frac{q^2(a - 3X)}{X(a + X)}$$

点電荷 Q の運動エネルギー K_X

最も近づいたとき、点電荷 Q の速度は 0 だから、 $K_X = 0$

$$\text{力学的エネルギー保存則より、} 0 + 0 = k_0 \frac{q^2(a - 3X)}{X(a + X)} + 0 \quad \therefore X = \frac{a}{3}$$

(6)

別冊解答は加速度の向きが変化する点から解答しているが、
力学的エネルギー保存則から解答すると、次のようになる。

$$U = \frac{k_0 q^2 (a - 3x)}{x(a+x)} \quad \left(x \geq \frac{a}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} U' &= k_0 q^2 \frac{(-3x)' \{x(a+x)\} - (a-3x)\{x(a+x)\}'}{\{x(a+x)\}^2} \\ &= k_0 q^2 \frac{3x^2 - 2ax - a^2}{\{x(a+x)\}^2} \\ &= k_0 q^2 \frac{(x-a)(3x+a)}{x^2(a+x)^2} \end{aligned}$$

より、 $U \left(x \geq \frac{a}{3} \right)$ の増減は

| | | | |
|------|---------------|----------------------|----------|
| x | $\frac{a}{3}$ | a | ∞ |
| U' | + | + | 0 |
| U | 0 | ↑ | - |
| | | $-k_0 \frac{q^2}{a}$ | ↓ |
| | | | 0 |

$K + U = 0$ より、 $K = -U$

よって、 K の最大値は $k_0 \frac{q^2}{a}$ であり、このときの速さを v とすると、 $\frac{1}{2}mv^2 = k_0 \frac{q^2}{a}$

$$\therefore v = q \sqrt{\frac{2k_0}{ma}} \quad \dots \text{(答)}$$