104. 平行板コンデンサー

(1)

電気容量の公式をガウスの法則から導く

コンデンサーの両極板（片面の面積S）に蓄えられた電荷をそれぞれ$+Q$，$-Q$とすると，

$+Q$がつくる電界の強さ

$+Q$は極板表面に分布するから，極板の厚さを無視すると，分布面積は$2S$である。

このことと電気力線は極板（等電位面）に垂直に出ることから，

ガウスの法則より電気力線の密度，すなわち電界の強さ$E_+ = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{\varepsilon \cdot S}$

$-Q$がつくる電界の強さ

同様に，$E_- = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{\varepsilon \cdot S}$

極板間の電界の向きは，いずれも$-Q$の電荷をもつ極板に垂直の向きだから，

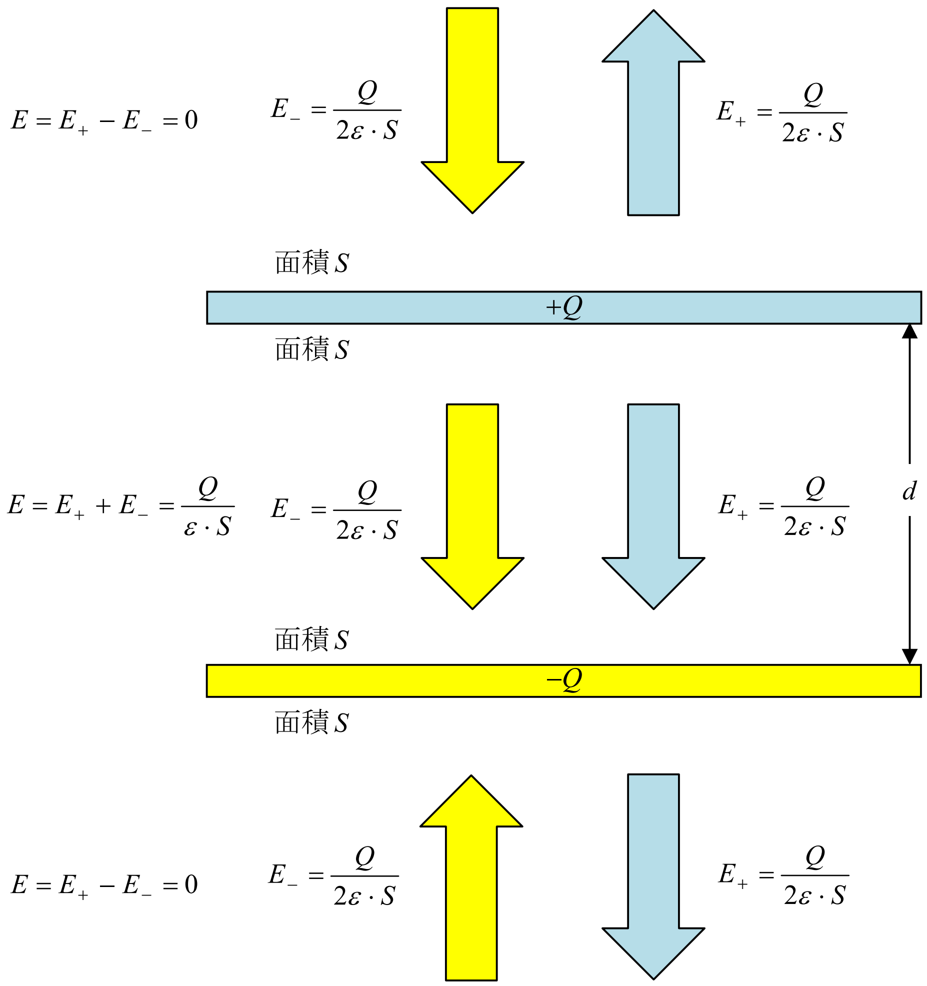
極板間の電界の強さ$E = E_+ + E_- = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{\varepsilon \cdot S} + \dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{\varepsilon \cdot S} = \dfrac{Q}{\varepsilon \cdot S}$　・・・①

また，このときの極板間の距離をdとすると，

極板間の電圧$V = Ed$　・・・②

①，②より，$\dfrac{V}{d} = \dfrac{Q}{\varepsilon \cdot S}$　$\therefore Q = \dfrac{\varepsilon \cdot S}{d}V$

電気容量をCとすると，その定義$C = \dfrac{Q}{V}$より，$C = \dfrac{\varepsilon \cdot S}{d}$



極板間の電界の強さは $\dfrac{Q}{\varepsilon \cdot S}$ だが，

極板間の外側では，両極板がつくる電界が打ち消しあうため 0 である。

(4)

静電エネルギーの式の求め方

$+Q$ に帯電した極板と $-Q$ に帯電した極板が限りなく接近している状態から
$-Q$ に帯電した極板を極板間の距離が d になるまで離すとき，
極板間の静電気力とつり合いの関係にある外力のした仕事が
極板間の静電気力の位置エネルギー，すなわち静電エネルギーとして蓄えられる。

$+Q$ がつくる電界の強さ $E_+ = \dfrac{1}{2}E$ より，

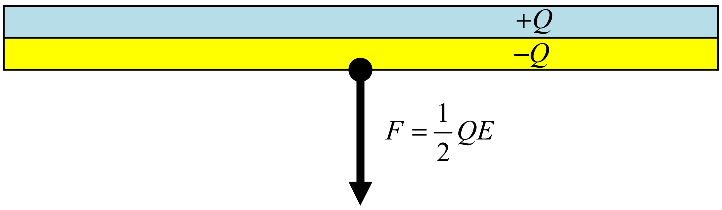
$-Q$ に帯電した極板が $+Q$ に帯電した極板から受ける静電気力の大きさ $= Q\cdot\dfrac{1}{2}E = \dfrac{1}{2}QE$

よって，つり合いの外力の大きさも $\dfrac{1}{2}QE$

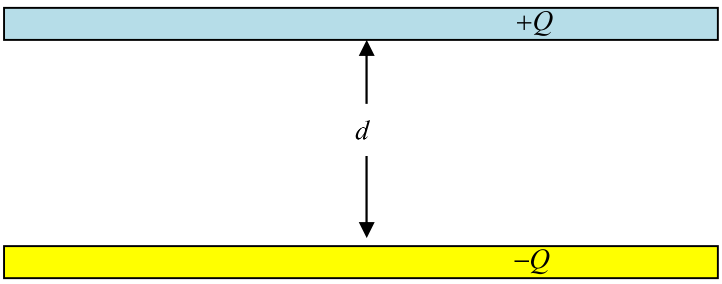
つり合いの外力と極板の移動の向きは同じだから，

つり合いの外力がした仕事 $= \dfrac{1}{2}QEd = \dfrac{1}{2}QV$

よって，蓄えられた静電エネルギー $U = \dfrac{1}{2}QV$



$\dfrac{1}{2}QEd = \dfrac{1}{2}QV$ の仕事が位置エネルギー，
すなわち静電エネルギーになる。



(6)

別解

極板間の電界の強さは $E=\dfrac{\varepsilon_0 Q}{S}$ で与えられることと

Q が変化しないことから E は変化しない。

したがって，(3)より，$E=\dfrac{V}{d}$

よって，極板間の電位差は $\dfrac{V}{d}\cdot(d+\Delta d)$ となる。

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
W' &= \frac{1}{2}C'\left\{\frac{V}{d}\cdot(d+\Delta d)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{d+\Delta d}\cdot\left\{\frac{V}{d}\cdot(d+\Delta d)\right\}^2 \\
&= \frac{\varepsilon_0 S(d+\Delta d)V^2}{2d^2} \\
&= \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d}\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right)
\end{aligned}
$$