

106. スイッチの切りかえによる電荷の移動

(5)

定性的に解くと、

↓スイッチ S_1

コンデンサー C_1 と C_2 に電荷が蓄えられる。

↓スイッチ S_2

コンデンサー C_1 の電荷は極板間の静電気力により移動できない。

コンデンサー C_2 の電荷は C_3 に分配される。

↓スイッチ S_1

コンデンサー C_1 と C_2 に電荷が蓄えられる。

↓スイッチ S_2

コンデンサー C_1 の電荷は極板間の静電気力により移動できない。

コンデンサー C_2 の電荷は C_3 に分配される。

↓スイッチの開閉を繰り返していく

スイッチの開閉が繰り返される毎にコンデンサー C_3 に蓄えられる電荷は増加していくが、一方で、コンデンサー C_2 からコンデンサー C_3 に分配（供給）される電荷は減少していく。

↓スイッチの開閉を無限に繰り返す

スイッチ S_2 を閉じててもコンデンサー C_2 からコンデンサー C_3 に電荷が分配されなくなる。つまり、コンデンサー C_2 の電荷もコンデンサー C_3 の電荷も変化しなくなる。

よって、

スイッチ S_2 を閉じたままスイッチ S_1 を閉じてても、どのコンデンサーの電荷も変化しない。

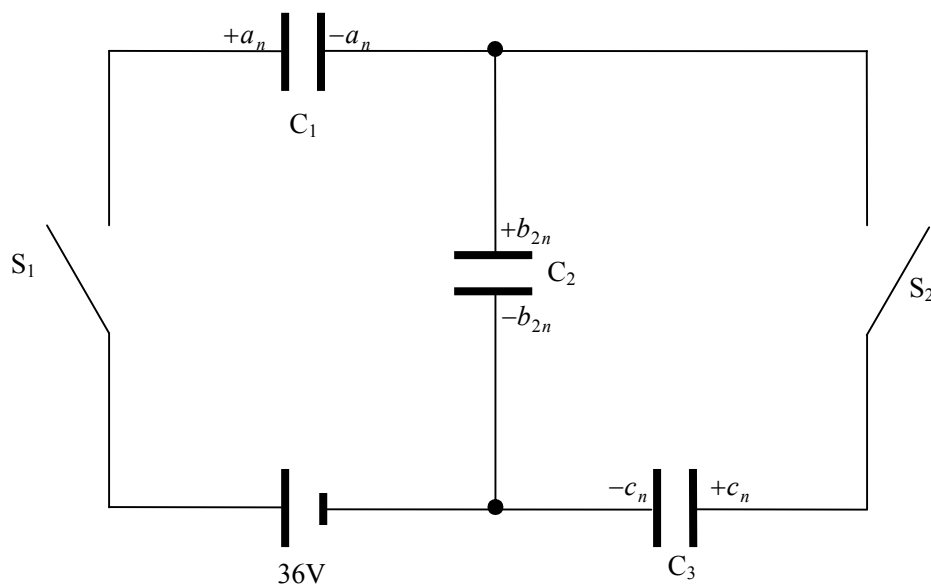
すなわち、

はじめからスイッチ S_1 とスイッチ S_2 を閉じ十分時間がたったときと同じ状態になる。

ゆえに、スイッチ S_1 とスイッチ S_2 を閉じた回路図で考えればよい。

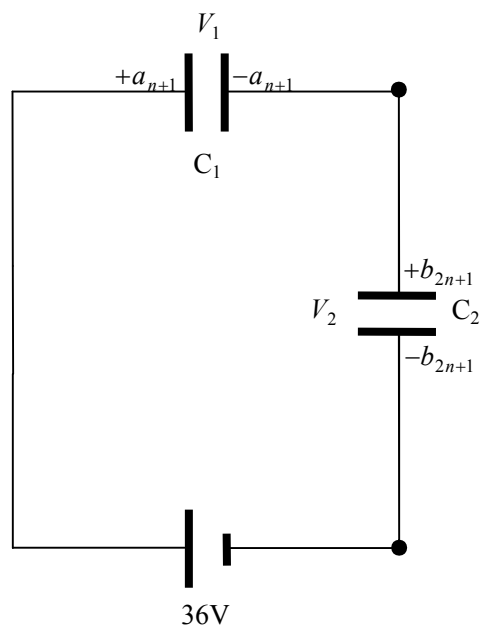
定量的に解いてみる。

n 回繰り返した後のコンデンサー C_1 , C_2 , C_3 に蓄えられた電荷をそれぞれ $a_n[\mu\text{C}]$, $b_{2n}[\mu\text{C}]$, $c_n[\mu\text{C}]$ とする。



スイッチ S_1 を閉じてから時間が十分に経過したとき

コンデンサー C_3 には電流が流れないから、次の閉回路で考えればよい。



C_1, C_2 の電圧をそれぞれ V_1, V_2 とすると,

$$a_{n+1} = C_1 V_1 = V_1, \quad b_{2n+1} = C_2 V_2 = V_2 \quad (\because C_1 = C_2 = 1\mu\text{F}) \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{キルヒホッフの第2法則より, } V_1 + V_2 = 36 \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{電気量保存則より, } -a_n + b_{2n} = -a_{n+1} + b_{2n+1}$$

$$\text{これと}\textcircled{1}\text{より, } -a_n + b_{2n} = -V_1 + V_2 \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より,

$$V_1 = 18 + \frac{a_n - b_{2n}}{2}, \quad V_2 = 18 + \frac{-a_n + b_{2n}}{2}$$

よって, ①より,

$$a_{n+1} = 18 + \frac{a_n - b_{2n}}{2}$$

$$\therefore 2a_{n+1} = 36 + a_n - b_{2n} \cdots \textcircled{4}$$

$$b_{2n+1} = 18 + \frac{-a_n + b_{2n}}{2}$$

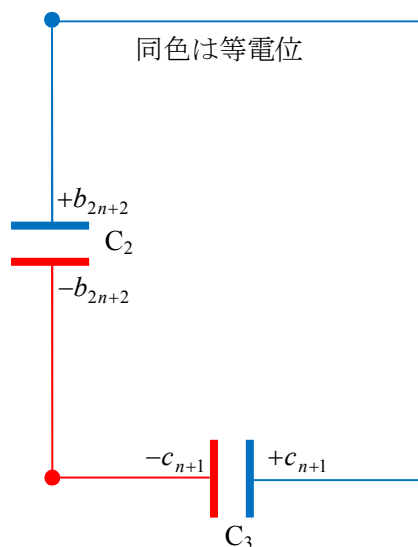
$$\therefore 2b_{2n+1} = 36 - a_n + b_{2n} \cdots \textcircled{5}$$

また,

$$(\textcircled{4} + \textcircled{5}) \div 2 \text{ より, } a_{n+1} + b_{2n+1} = 36$$

$$\therefore a_n + b_{2n-1} = 36 \cdots \textcircled{6}$$

スイッチ S_1 を開き, スイッチ S_2 を閉じてから時間が十分に経過した時
コンデンサー C_1 の電荷は, 極板間の静電気力により, 移動できないから,
次の閉回路で考えればよい。



電気量保存則より, $b_{2n+1} + c_n = b_{2(n+1)} + c_{n+1} \quad \dots \textcircled{7}$

$$\frac{b_{2(n+1)}}{c_{n+1}} = \frac{C_2 V}{C_3 V} = \frac{1}{2} \text{ より, } c_{n+1} = 2b_{2(n+1)}$$

$$\therefore b_{2n} = \frac{c_n}{2} \quad \dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧より,

$$b_{2n+1} = b_{2(n+1)} + c_{n+1} - c_n = \frac{c_{n+1}}{2} + c_{n+1} - c_n = \frac{3}{2}c_{n+1} - c_n$$

$$\therefore b_{2n+1} = \frac{3}{2}c_{n+1} - c_n \quad \dots \textcircled{9}$$

④に⑧を代入すると,

$$2a_{n+1} = 36 + a_n - \frac{c_n}{2} \quad \therefore 4a_{n+1} - 2a_n + c_n - 72 = 0 \quad \dots \textcircled{10}$$

⑤に⑧, ⑨を代入すると,

$$3c_{n+1} - 2c_n = 36 - a_n + \frac{c_n}{2} \quad \therefore 2a_n = 72 - 6c_{n+1} + 5c_n \quad \dots \textcircled{11}$$

⑪を⑩の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} 4a_{n+1} - 2a_n + c_n - 72 &= 2 \cdot 2a_{n+1} - 2a_n + c_n - 72 \\ &= 2(72 - 6c_{n+2} + 5c_{n+1}) - (72 - 6c_{n+1} + 5c_n) + c_n - 72 \\ &= -12c_{n+2} + 16c_{n+1} - 4c_n \end{aligned}$$

$$\therefore c_{n+2} - \frac{4}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n = 0 \quad \dots \textcircled{12}$$

⑫が $c_{n+2} - \alpha c_{n+1} = \beta(c_{n+1} - \alpha c_n)$ の形で表せるとすると,

$$c_{n+2} - (\alpha + \beta)c_{n+1} + \alpha\beta \cdot c_n = 0$$

$$\text{よって, } \alpha + \beta = \frac{4}{3}, \alpha\beta = \frac{1}{3}$$

これは, α, β が, $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ の解であることを示しており,

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = (x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \text{ より,}$$

$$(\alpha, \beta) = \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$(\alpha, \beta) = \left(1, \frac{1}{3}\right) \text{ のとき}$$

$$c_{n+2} - \frac{1}{3}c_{n+1} = c_{n+1} - \frac{1}{3}c_n = \dots = c_2 - \frac{1}{3}c_1$$

$$\text{オ}より c_1 = 12, \text{キ}より c_2 = 16 \text{ だから, } c_2 - \frac{1}{3}c_1 = 12$$

よって,

$$c_{n+1} - \frac{1}{3}c_n = 12 \quad \dots \textcircled{13}$$

$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ のとき

$$c_{n+2} - c_{n+1} = \frac{1}{3}(c_{n+1} - c_n) \quad \therefore \frac{c_{n+2} - c_{n+1}}{c_{n+1} - c_n} = \frac{1}{3}$$

よって, $c_{n+1} - c_n$ は公比 $\frac{1}{3}$, 初項 $c_2 - c_1 = 16 - 12 = 4$ の等比数列である。

$$\therefore c_{n+1} - c_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{14}$$

$\textcircled{13} - \textcircled{14}$ より,

$$\frac{2}{3}c_n = 12 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって,

$$c_n = 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{15}$$

$\textcircled{15}$ を $\textcircled{11}$ に代入すると,

$$\begin{aligned} 2a_n &= 72 - 6c_{n+1} + 5c_n \\ &= 72 - 6 \left\{ 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} + 5 \left\{ 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= 72 - 6 \left\{ 18 - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} + 5 \left\{ 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= 54 - 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

よって,

$$a_n = 27 - 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{16}$$

$\textcircled{15}$ を $\textcircled{8}$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
 b_{2n} &= \frac{c_n}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} \\
 &= 9 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

よって,

$$b_{2n} = 9 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \quad \dots \textcircled{17}$$

⑮を⑨に代入すると,

$$\begin{aligned}
 b_{2n+1} &= \frac{3}{2} c_{n+1} - c_n \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} - \left\{ 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ 18 - 6 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} - \left\{ 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} \\
 &= 9 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

$n=0$ を代入すると $b_1 = 18$

一方, $\textcircled{ア}$ より, $Q_1 = 18$

これは, $n=0$ の場合でも成り立つことを示している。

そこで, 定義域を自然数とする数列に書き改めると,

$$\begin{aligned}
 b_{2n-1} &= 9 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} \\
 &= 9 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\
 &= 9 + 9 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \\
 &= 9 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}
 \end{aligned}$$

よって,

$$b_{2n-1} = 9 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} \quad \dots \textcircled{18}$$

まとめ

n 回繰り返した後のコンデンサー C_1 , C_2 , C_3 に蓄えられた電荷をそれぞれ $a_n [\mu\text{C}]$, $b_{2n} [\mu\text{C}]$, $c_n [\mu\text{C}]$ とすると,

⑮, ⑯, ⑰, ⑱より,

スイッチ S_1 を閉じた回数が n 回後のコンデンサー C_1 に蓄えられる電荷

$$a_n = 27 - 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

スイッチ S_1 を閉じた回数が n 回後のコンデンサー C_2 に蓄えられる電荷

$$b_{2n-1} = 9 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

スイッチ S_2 を閉じた回数が n 回後のコンデンサー C_2 に蓄えられる電荷

$$b_{2n} = 9 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

スイッチ S_2 を閉じた回数が n 回後のコンデンサー C_3 に蓄えられる電荷

$$c_n = 18 - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって, 無限に操作を繰り返したとき,

コンデンサー C_1 に蓄えられる電荷: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 27 [\mu\text{C}]$

コンデンサー C_2 に蓄えられる電荷: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = 9 [\mu\text{C}]$

コンデンサー C_3 に蓄えられる電荷: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 18 [\mu\text{C}]$

補足

4 項間漸化式 $a_{n+3} + pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ の場合

$a_{n+3} - (\alpha + \beta)a_{n+2} + \alpha\beta a_{n+1} = \gamma \{a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n\}$ とおくと,

$a_{n+3} - (\alpha + \beta + \gamma)a_{n+2} + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)a_{n+1} - \alpha\beta\gamma a_n = 0$ より,

$\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$ となるので,

α, β, γ は 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解である。

これを活かして数列 $\{a_n\}$ 一般項を求めればよい。