119. コンデンサーを含む回路と抵抗で消費されるエネルギー

(1)

補足：図 **2** のグラフの方程式

時刻 t における矢印の向きの電流を $I(t)$ （>0），コンデンサーの電圧を $V_{\mathrm{C}}(t)$ とすると，

キルヒホッフの法則より，$V=RI(t)+V_{\mathrm{C}}(t)$ ・・・①

コンデンサー1 の電池正極側極板の時刻 t における電荷を $Q(t)$ とすると，

$Q(t)>0,\ \dfrac{dQ(t)}{dt}>0$ より，$V_{\mathrm{C}}(t)=\dfrac{Q(t)}{C}$，$I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}$

これらを①に代入すると，$V=R\dfrac{dQ(t)}{dt}+\dfrac{Q(t)}{C}$ より，

$$CV-Q(t)=RC\cdot\frac{dQ(t)}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{CV-Q(t)}dQ(t)=\frac{dt}{RC} \quad \therefore \int\frac{1}{CV-Q(t)}dQ(t)=\int\frac{dt}{RC}$$

積分定数を α とすると，これより $-\log(CV-Q(t))=\dfrac{t}{RC}+\alpha \quad (\because CV>Q(t))$

$$\therefore CV-Q(t)=e^{-\left(\frac{t}{RC}+\alpha\right)}$$

ここで，$t=0$ のとき $Q(0)=0$ だから，$CV=e^{-\alpha}$

したがって，

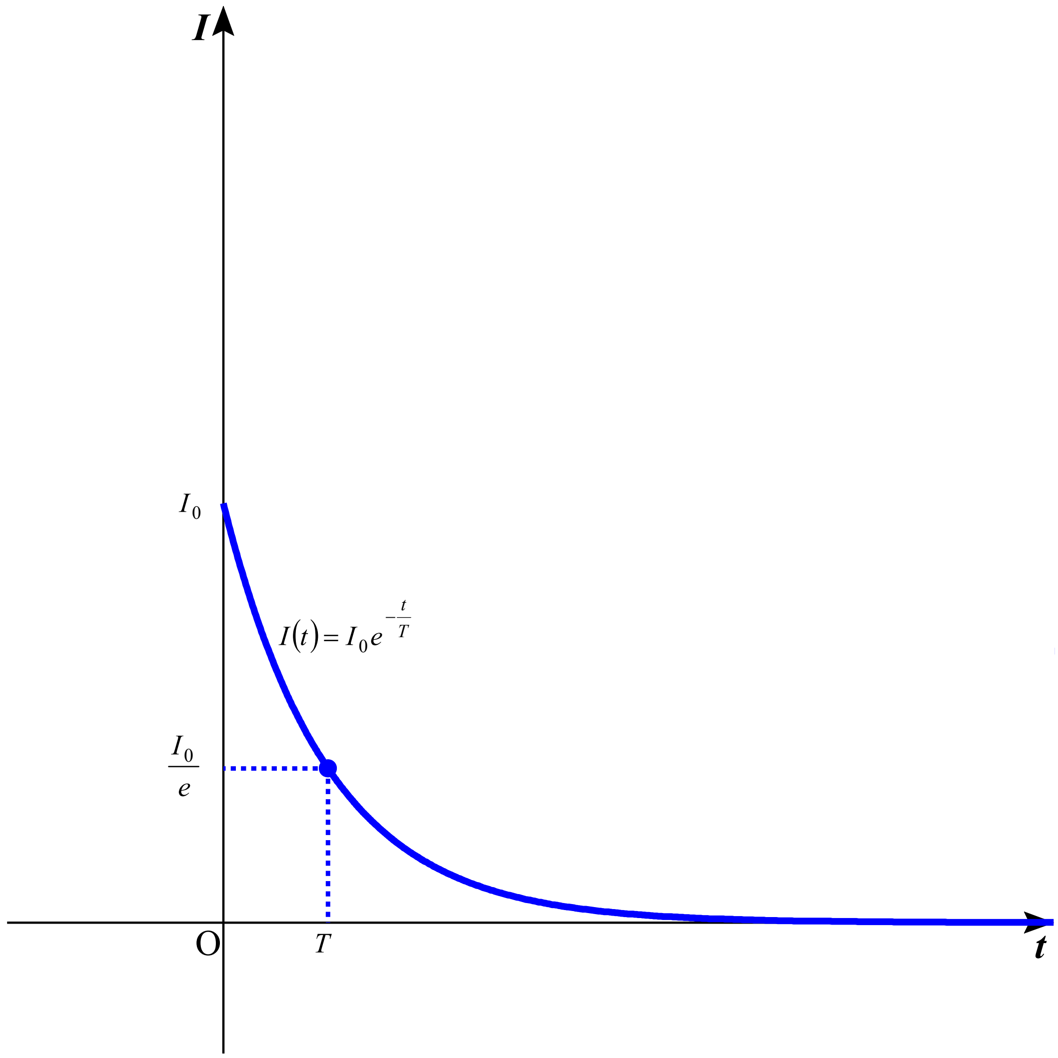
$$\begin{aligned}CV-Q(t)&=e^{-\left(\frac{t}{RC}+\alpha\right)}\\&=e^{-\frac{t}{RC}}\cdot e^{-\alpha}\\&=e^{-\frac{t}{RC}}\cdot CV\end{aligned}$$

ゆえに，$Q(t)=CV\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

これより，$I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}=\dfrac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

これと $\dfrac{V}{R}=I_0$，$RC=T$ より，$I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{t}{T}}$

ゆえに，電流は T を半減期として減少していく。


I
I_0
$I(t)=I_0e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{I_0}{e}$
O
T
t

(2)

抵抗の値が $\frac{R}{2}$ のとき，$t=0$ のときの電流を I_0'，電流が $\frac{I_0'}{e}$ に減少した時刻を $t=T'$ とすると，十分時間が経ったときコンデンサーに蓄えられた電荷は $I_0'T'$ である。

コンデンサー1 に蓄えられる電荷は抵抗の値に依らず同じだから，$I_0'T'=I_0T$

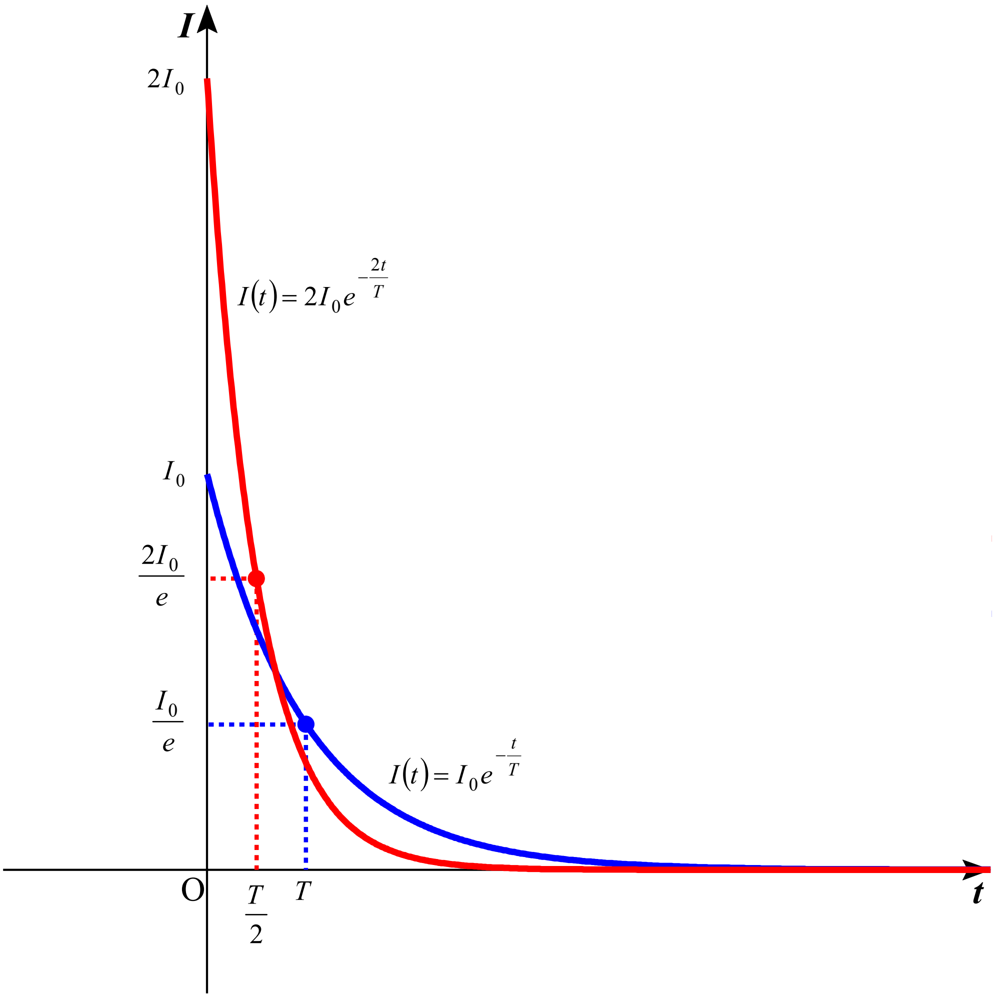
これと $I_0'=\frac{V}{\frac{R}{2}}=\frac{2V}{R}=2I_0$ より，$T'=\frac{T}{2}$

よって，$t=0$ のときの電流 $I_0'=2I_0$，電流が $\frac{I_0'}{e}=\frac{2I_0}{e}$ に減少した時刻 $t=T'=\frac{T}{2}$

補足：グラフの方程式を求めてみる。

(1)補足で求めた式 $I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ の R に $\frac{R}{2}$ を代入することにより，$I(t)=\frac{2V}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$

これと $\frac{V}{R}=I_0$，$RC=T$ より，$I(t)=2I_0e^{-\frac{2t}{T}}$



(3)

コンデンサー1 とコンデンサー2 の電気容量が同じであることと
放電前のコンデンサー1 に蓄えられている電荷が $I_0 T$ であることから，
十分時間が経つと，コンデンサー2 に蓄えられた電荷は $\dfrac{I_0 T}{2}$ になる。

よって，抵抗を負の向きに移動した電荷の大きさは $\dfrac{I_0 T}{2}-0=\dfrac{I_0 T}{2}$

したがって，時刻 $t=0$ のときの電流を I_0''，電流が $\dfrac{I_0''}{e}$ に減少した時刻を $t=T''$ とすると

$\left|I_0''T''\right|=\left|\dfrac{I_0 T}{2}\right|$ ・・・①

また，スイッチ 2 を閉じる前のコンデンサー2 の極板間の電圧は 0 だから，
コンデンサー2 の 2 つの極板の電位はいずれもコンデンサー1 の負極板の電位と等しい。
よって，スイッチ 2 を閉じた瞬間のコンデンサー1 の正極板とコンデンサー2 の電位差は
コンデンサー1 の極板間の電位差と等しい。すなわち電位差は V である。

よって， $I_0''=-\dfrac{V}{R}=-I_0$ ・・・②

①，②より， $T''=\dfrac{T}{2}$

以上より，

時刻 $t=0$ のときの電流 $I_0''=-I_0$，電流が $\dfrac{I_0''}{e}$ に減少した時刻 $t=T''=\dfrac{T}{2}$

補足：グラフの方程式を求めてみる。

コンデンサー1 の極板間の電圧を $V_1(t)$，コンデンサー2 の極板間の電圧を $V_2(t)$，
電流を $I(t)$ とすると，回路の起電力が 0 だから，
キルヒホッフの法則の式は $0=V_1(t)+RI(t)+V_2(t)$ ・・・③

放電中のコンデンサー1 に蓄えられている電荷を $Q(t)$ とすると $V_1(t)=\dfrac{Q(t)}{C}$，

$V_2(t)$ は $V_1(t)$ と逆向きでありかつ孤立部分の電気量 CV が保存されることから，

$$V_2(t)=-\frac{CV-Q(t)}{C}=-V+\frac{Q(t)}{C}$$

また， $I(t)=\dfrac{dQ(t)}{dt}$ （<0）

これらを③に代入して整理すると，

$$0=\frac{2Q(t)}{C}+R\cdot\frac{dQ(t)}{dt}-V \Leftrightarrow CV-2Q(t)=RC\cdot\frac{dQ(t)}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{2Q(t)-CV}dQ(t)=-\frac{dt}{RC}$$

$\therefore \int \frac{1}{2Q(t)-CV}\,dQ(t) = -\int \frac{dt}{RC}$

積分定数を β とすると，$\frac{\log(2Q(t)-CV)}{2} = -\frac{t}{RC} + \beta$　$\left(\because \frac{CV}{2} < Q(t) \leq CV\right)$ より，

$2Q(t) - CV = e^{2\beta} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$

ここで，$t=0$ のとき $Q(0)=CV$ だから，$CV = e^{2\beta}$

よって，$2Q(t) - CV = CV \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$

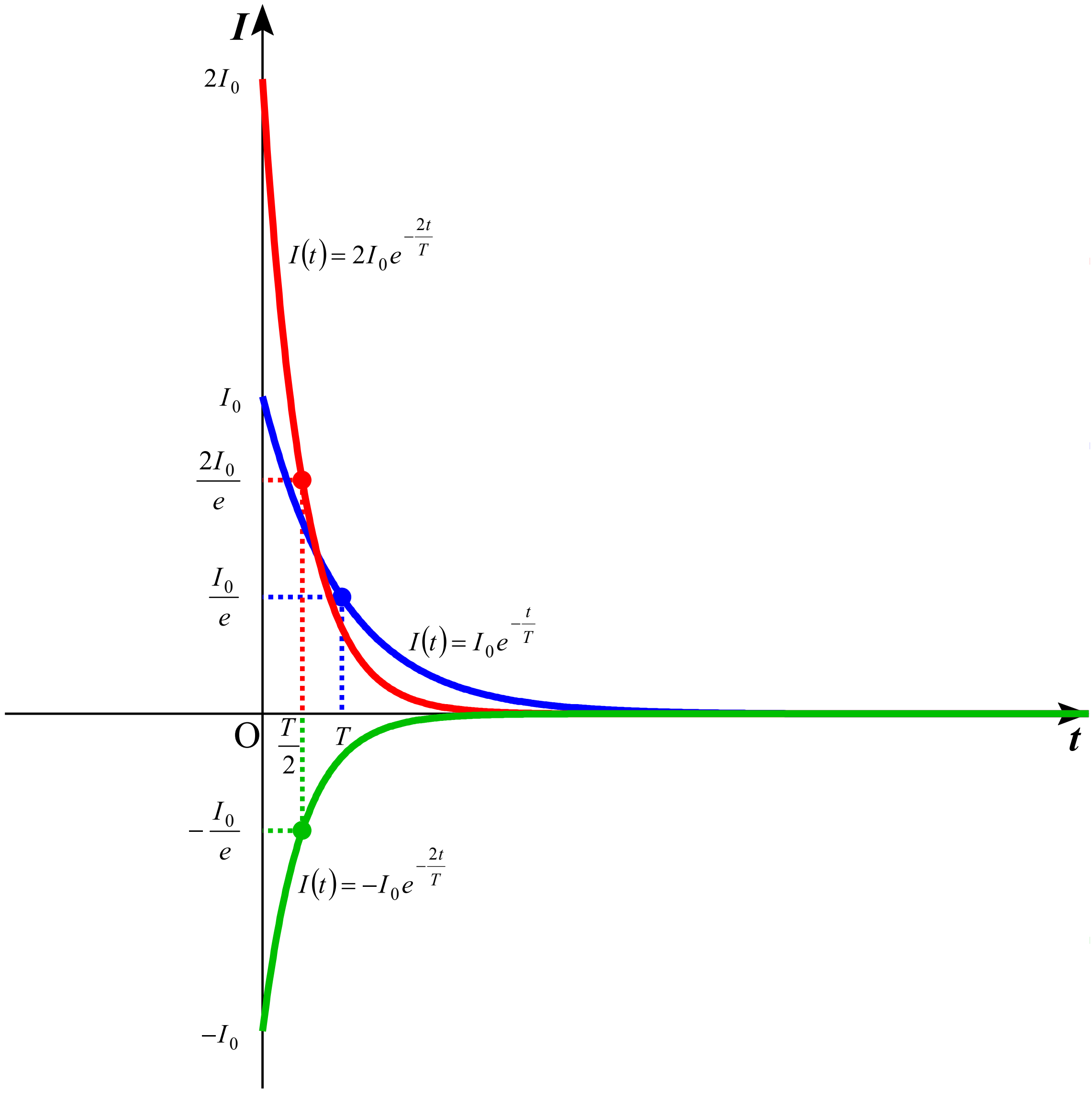
すなわち $Q(t) = \frac{CV}{2}\left(1 + e^{-\frac{2t}{RC}}\right)$

したがって，

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$
$$= -\frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$$

これと $\frac{V}{R} = I_0$，$RC = T$ より，グラフの式は $I(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{2t}{T}}$

補足：$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{CV}{2}\left(1 + e^{-\frac{2t}{RC}}\right) = \frac{CV}{2}$



I
$2I_0$
$I(t)=2I_0e^{-\frac{2t}{T}}$
I_0
$\frac{2I_0}{e}$
$\frac{I_0}{e}$
$I(t)=I_0e^{-\frac{t}{T}}$
O
$\frac{T}{2}$
T
t
$-\frac{I_0}{e}$
$I(t)=-I_0e^{-\frac{2t}{T}}$
$-I_0$