7. 斜面への斜方投射

(4)

斜面に垂直に衝突する直前の速さを求める。

斜面に垂直に衝突する直前の $v_x = 0$ より，$v_x = v_0 \cos\alpha_2 - g\sin\theta \cdot t = 0$ $\therefore t = \dfrac{v_0 \cos\alpha_2}{g\sin\theta}$

$$v_y = v_0 \sin\alpha_2 - g\cos\theta \cdot t$$
$$= v_0 \sin\alpha_2 - g\cos\theta \cdot \frac{v_0\cos\alpha_2}{g\sin\theta}$$
$$= v_0 \sin\alpha_2 - \frac{v_0\cos\alpha_2}{\tan\theta}$$

ここで，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ より，$\tan\theta = 1$

$\tan\alpha_2 = \dfrac{1}{2}$ と三角比より，$\sin\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって，$v_y = v_0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} - v_0 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{v_0}{\sqrt{5}}$

ゆえに，斜面に衝突する直前の速さを v_1 とすると，$v_1 = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{0 + \left(-\dfrac{v_0}{\sqrt{5}}\right)^2} = \dfrac{v_0}{\sqrt{5}}$

はねかえった直後の速さを求める。

はねかえった直後の速さを v_2 とすると，条件より，

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{v_0}{2\sqrt{5}}$$

1回目の衝突から2回目の衝突までの時間を(1)で求めた式を使って求める。

(1)で得られた衝突するまでの時間の式 $\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\theta}$ について，

v_0 は初速度の大きさだから，v_0 に v_2 を，

α は斜面に対する打ち上げ角度であり，垂直にはねかえるから α に $\dfrac{\pi}{2}$ を，

θ は斜面の傾斜角だから，θ に $\dfrac{\pi}{4}$ をそれぞれ代入すればよい。

よって，求める時間は，$\dfrac{2 \cdot \dfrac{v_0}{2\sqrt{5}} \sin\dfrac{\pi}{2}}{g\cos\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}v_0}{5g}$

(5)

$$\mathrm{AB}=\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot t^2$$
$$=\frac{1}{2}g\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{10}v_0}{5g}\right)^2$$
$$=\frac{\sqrt{2}g}{4}\cdot\frac{10{v_0}^2}{25g^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}{v_0}^2}{10g}$$

あるいは,

(2)の式を利用することにより,

$$\frac{2{v_2}^2\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}{g\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{{v_0}^2}{10}\cdot 1\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{g}{2}}=-\frac{\sqrt{2}{v_0}^2}{10g}$$

値が負だから，B は斜面にそって A の下方 $\frac{\sqrt{2}{v_0}^2}{10g}$ の位置にある。