

33. 空気の抵抗がある物体の運動

図2の曲線の方程式の一般解を求めてみよう

運動方程式： $Ma = Mg \sin \theta - \mu' Mg \cos \theta - kv$

加速度 $a = \frac{dv}{dt}$ より,

$$M \frac{dv}{dt} = Mg \sin \theta - \mu' Mg \cos \theta - kv$$

$$M \frac{dv}{dt} = -k \left(v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{M} \left(v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} \right)$$

$$\frac{dv}{v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k}} = -\frac{k}{M} dt$$

よって,

$$\int \frac{dv}{v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k}} = \int -\frac{k}{M} dt$$

$$v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} > 0 \text{ より,}$$

$$\log \left(v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} \right) = -\frac{k}{M} t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} = e^{-\frac{k}{M} t + C}$$

$$\therefore v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} = e^C \cdot e^{-\frac{k}{M} t} \quad \dots \textcircled{1}$$

 $t = 0$ のとき $v = 0$ より,

$$0 + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} = e^C \cdot e^0$$

$$\therefore e^C = \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$\therefore v + \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} = \frac{\mu' Mg \cos \theta - Mg \sin \theta}{k} \cdot e^{-\frac{k}{M} t}$$

ゆえに、図2の曲線の方程式の一般解は、

$$v = \frac{Mg \sin \theta - \mu' Mg \cos \theta}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{M}t} \right)$$

また、

$t \rightarrow \infty$ のとき、 $e^{-\frac{k}{M}t} \rightarrow 0$ だから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{Mg \sin \theta - \mu' Mg \cos \theta}{k}$$

実際、

$\theta = 30^\circ$ 、 $\mu' = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} v = 4$ を上式に代入すると、

$$4 = \frac{Mg \sin 30^\circ - \mu' Mg \cos 30^\circ}{k}$$

$$k = \frac{Mg}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\therefore k = \frac{1}{12} Mg \quad \dots (5) \text{の答}$$

となる。