

43. 棒でつながれた2物体の運動

(1)

物体Aと棒の接続点の高さを0とする。

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 + mgl \cos \theta$$

$$\text{よって, } v = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)} \quad \dots \text{(答)}$$

(2)

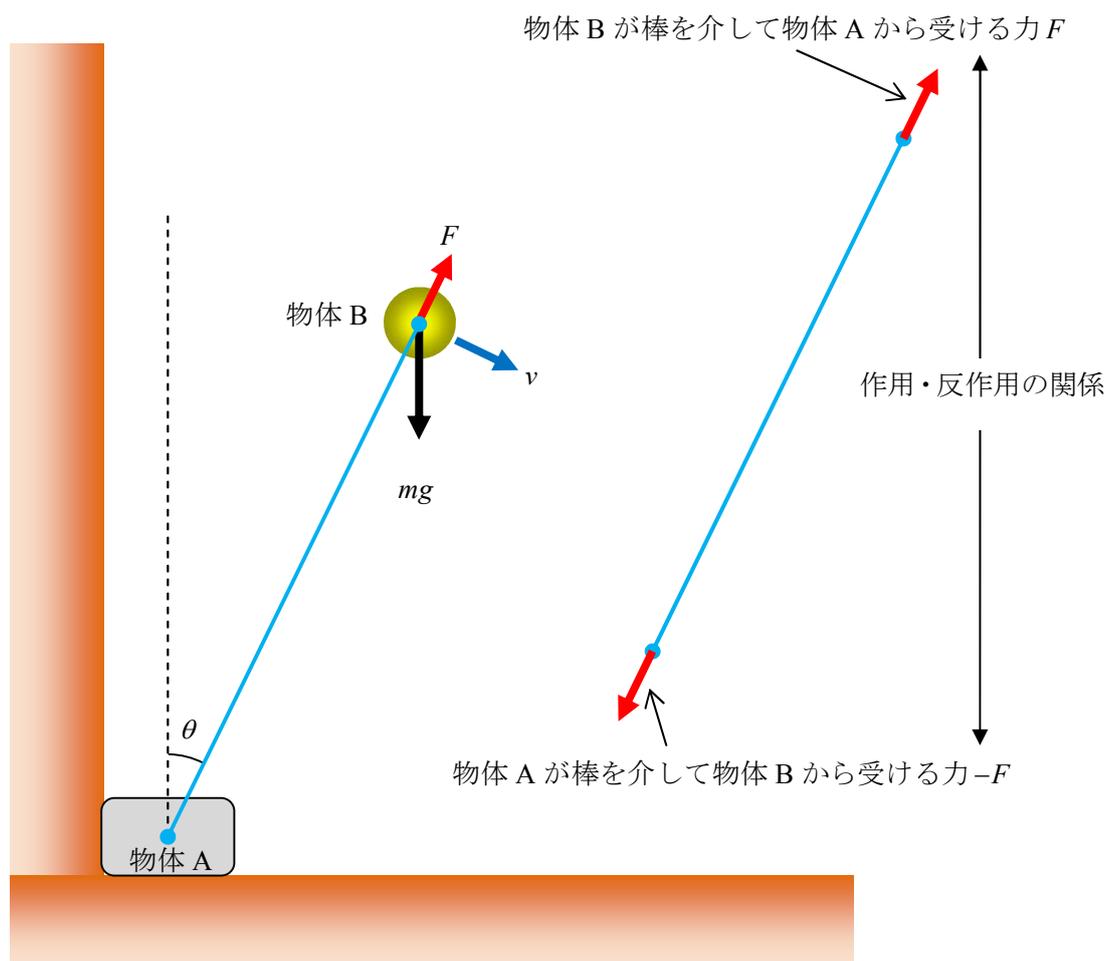
物体Aが壁に接するためには、棒は物体Aを左下に押しなければならない。

このとき棒は物体Aから右上にその反作用の力を受ける。

ところが棒には質量がないから、これは本質的には物体Aと物体Bの作用・反作用である。

離れた2物体間の作用反作用の関係の1つといったところでしょうか。

よって、物体Bは棒を介して物体Aから反作用力 F を右上に受けることになる。



物体 B に働く向心力 = $mg \cos \theta - F$ より,

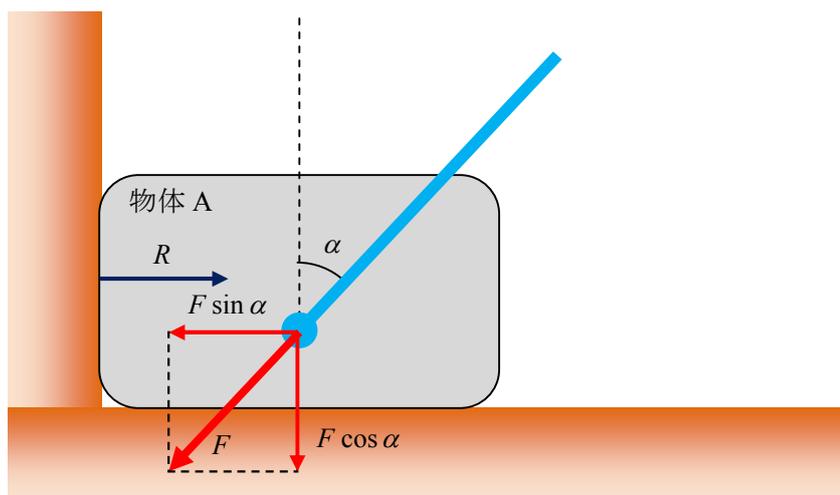
物体 B の運動方程式は, $\frac{mv^2}{l} = mg \cos \theta - F$

(1)より $mv^2 = 2mgl(1 - \cos \theta)$

よって, $2mg(1 - \cos \theta) = mg \cos \theta - F$

$\therefore F = mg(3 \cos \theta - 2)$. . . (答)

(3)



壁からの垂直抗力を R とすると,

物体 A に働く力の壁に垂直な成分のつり合いより, $R = F \sin \theta$

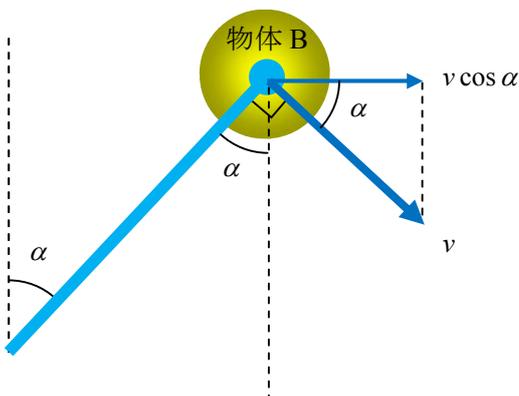
物体 A が壁から離れるとき, $R = 0$ となるから, $0 = F \sin \alpha$

$\therefore mg(3 \cos \alpha - 2) \sin \alpha = 0$ $\sin \alpha \neq 0$ より, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. . . (答)

(4)

$\cos \alpha = \frac{2}{3}$ および $v = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}$ より, $v = \sqrt{\frac{2gl}{3}}$

下図より, $P = mv \cos \alpha$ $\therefore P = \frac{2m}{3} \sqrt{\frac{2gl}{3}}$. . . (答)



(5)

(2), (3)の解説図より,

物体 A の運動量を変化させる力積は $-F \sin \theta \cdot \Delta t$ 物体 B の水平方向の運動量を変化させる力積は $F \sin \theta \cdot \Delta t$

力積の和=0 より, 物体 A と物体 B の水平方向の運動量の和が保存される。

また,

物体 B が物体 A の真横 ($\theta = 90^\circ$) にきたとき,

物体 A から見ると物体 B の速度の向きは床と垂直の向きになるから,

物体 A から見た物体 B の水平方向の速度は 0 である。

よって, 右向きを正とすると, 物体 B の水平方向の速度=物体 A の速度= V

以上より,

 $\theta = \alpha$ と $\theta = 90^\circ$ の運動量について, $P + 0 = mV + MV$ が成り立つ。

$$\therefore V = \frac{P}{m + M} \quad \dots \text{(答)}$$

(6)

水平方向の運動量保存則

最高点に達したとき, 物体 A から見ると物体 B は静止する。

したがって, このときの物体 A の速度を V' とすると,物体 B の速度=物体 A の速度= V'

また, (5)で説明したように, 運動量が保存されるから,

$$P = mV + MV = mV' + MV' \quad \therefore V' = V \quad \dots \text{①}$$

力学的エネルギー保存則

物体 B は床と完全弾性衝突するから, 衝突前後の力学的エネルギーは保存される。

よって,

$$mgl = \frac{1}{2} MV'^2 + \frac{1}{2} mV'^2 + mgl \cos \beta \quad \dots \text{②}$$

①, ②より,

$$mgl = \frac{1}{2} (m + M) V^2 + mgl \cos \beta$$

$$(m + M) mgl = \frac{1}{2} (m + M)^2 V^2 + (m + M) mgl \cos \beta$$

$$(m + M) mgl = \frac{1}{2} P^2 + (m + M) mgl \cos \beta$$

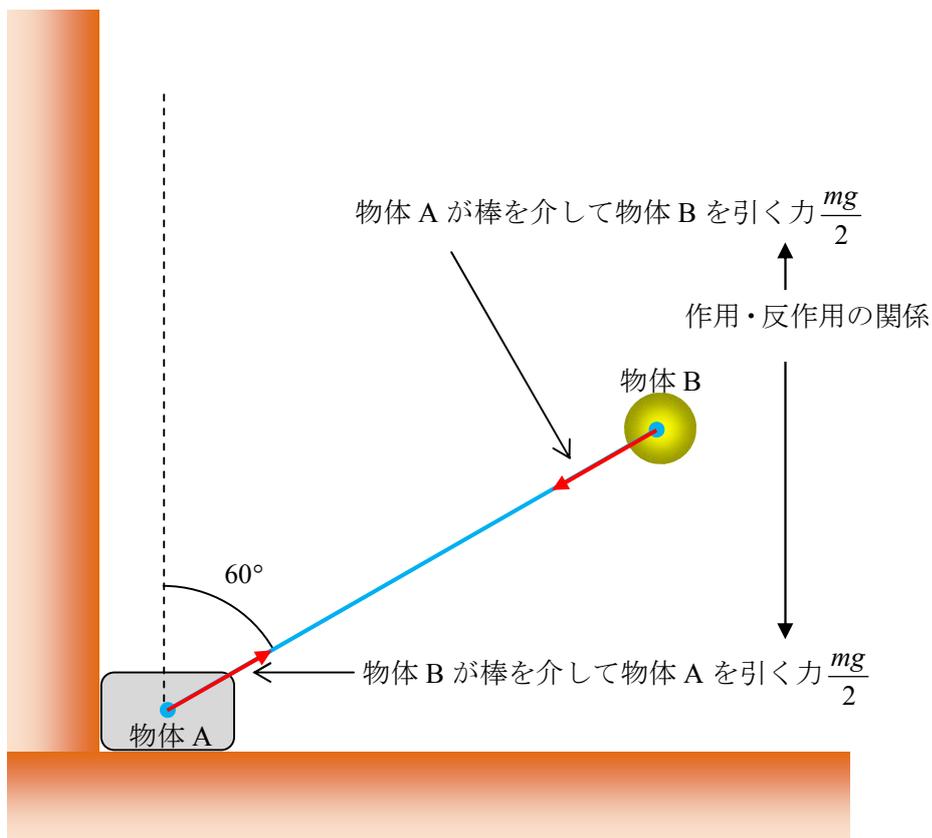
$$\cos \beta = 1 - \frac{P^2}{2m(m + M)gl} \quad \dots \text{(答)}$$

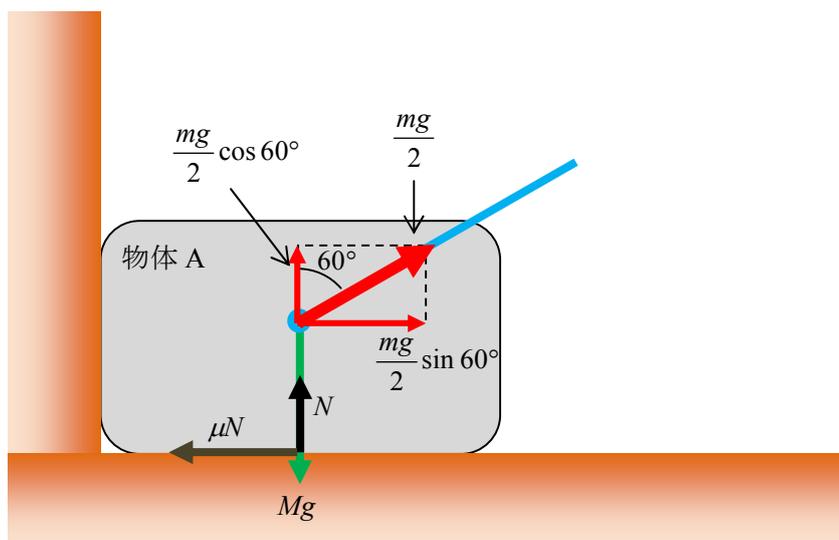
(7)

(3)より $F = mg(3 \cos \theta - 2)$

これと $\theta = 60^\circ$ より, $F = -\frac{mg}{2}$

つまり, 下図のように, 棒を介して押し合う関係の力が引き合う関係の力になる。





物体 A が床から受ける垂直抗力を N とすると、
床と垂直方向の力のつり合い

$$N + \frac{mg}{2} \cos 60^\circ = Mg \quad \therefore N = Mg - \frac{mg}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

水平方向の力のつり合い

壁から離れるときの壁面からの垂直抗力は 0 だから、

$$\mu N = \frac{mg}{2} \sin 60^\circ \quad \therefore \mu = \frac{\sqrt{3}mg}{4N} \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④より、

$$\mu = \frac{\sqrt{3}mg}{4\left(Mg - \frac{mg}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}m}{4M - m} \quad \dots \text{(答)}$$

(1)の補足

棒が物体 A に作用する力の向きは常に物体 A の運動方向と垂直だから、
棒が物体 A の運動の向きにする仕事は 0 である。

したがって、物体 A の運動エネルギー変化に棒がする仕事は寄与しない。

一方、物体 A に働く重力の向きと物体 A の運動の向きとのなす角が ϕ から $d\phi$ 微小変化したとき、重力が物体 A にする微小の仕事を dW とすると、

$d\phi = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \Delta\phi$ より、重力の物体 A の運動方向の成分は $mg \sin \phi$ としてよいから、

$$dW = mg \sin \phi \cdot l \cdot d\phi$$

よって、重力が物体 A の運動の向きにした仕事を W とすると、 $W > 0$ より、

$$W = |W| = \left| \int_{\theta}^0 dW \right| = \left| \int_{\theta}^0 mg l \sin \phi d\phi \right| = \left| mgl [-\cos \phi]_{\theta}^0 \right| = mgl(1 - \cos \theta)$$

したがって、物体 A の運動エネルギーと仕事の関係式は $0 + mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2$

ゆえに、 $v = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}$