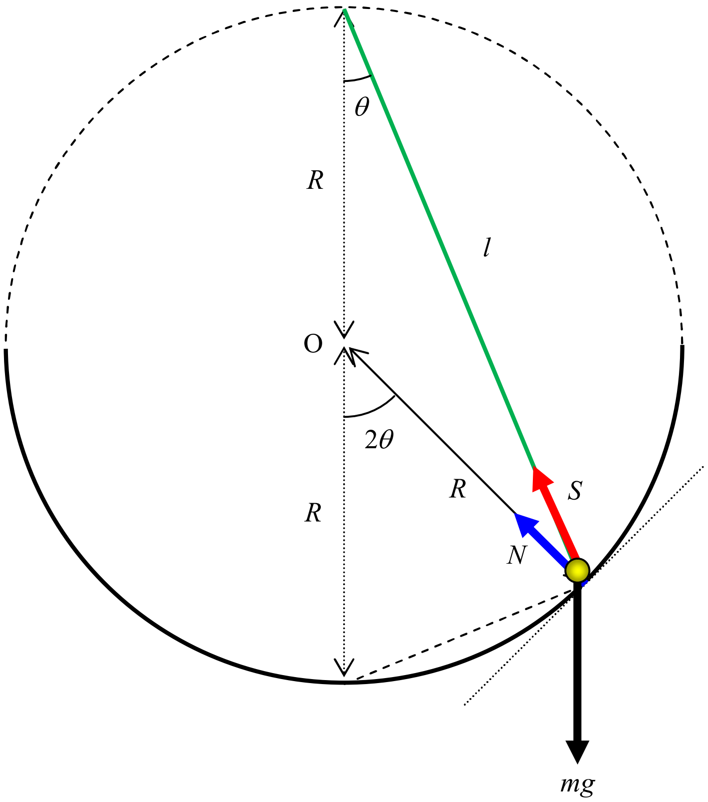
51．半球内での物体の円運動

(4)



張力の大きさを S，垂直抗力の大きさを N とする。

鉛直方向のつり合い

$$mg = S\cos\theta + N\cos 2\theta$$
$$= S\cos\theta + N\left(-1 + 2\cos^2\theta\right)$$

これと $\cos\theta = \dfrac{l}{2R}$ より，$mg = \dfrac{l}{2R}S + \dfrac{l^2 - 2R^2}{2R^2}N$

よって，$2mgR^2 = lRS + \left(l^2 - 2R^2\right)N$ ・・・①

等速円運動の中心方向の運動方程式

$$ml\sin\theta\cdot\omega^2 = S\sin\theta + N\sin 2\theta$$
$$= S\sin\theta + 2N\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore ml\omega^2 = S + 2N\cos\theta$$
$$= S + \frac{lN}{R}$$

よって，$mlR\omega^2 = RS + lN$ ・・・②

(a)

小球の角速度が小さくなると回転半径が小さくなり，小球は半球の内面から離れ始める。

この瞬間垂直抗力は初めて 0 になるから，①と②それぞれに $N=0$ を代入して整理すると，

$2mgR=lS$ ・・・③

$ml{\omega_{\min}}^2=S$ ・・・④

$\dfrac{④}{③}$ より，$\dfrac{l{\omega_{\min}}^2}{2gR}=\dfrac{1}{l}$ $\therefore \omega_{\min}=\dfrac{\sqrt{2gR}}{l}$

(2)

小球の角速度が大きくなると回転半径が大きくなり，ひもが緩み始める。

この瞬間張力は初めて 0 になるから，①と②それぞれに $S=0$ を代入して整理すると，

$2mgR^2=\left(l^2-2R^2\right)N$ ・・・⑤

$mR{\omega_{\max}}^2=N$ ・・・⑥

$\dfrac{⑥}{⑤}$ より，$\dfrac{{\omega_{\max}}^2}{2gR}=\dfrac{1}{l^2-2R^2}$ $\therefore \omega_{\max}=\sqrt{\dfrac{2gR}{l^2-2R^2}}$