ケプラーの第 2 法則と角運動量保存則

A.　面積速度

面積速度とは

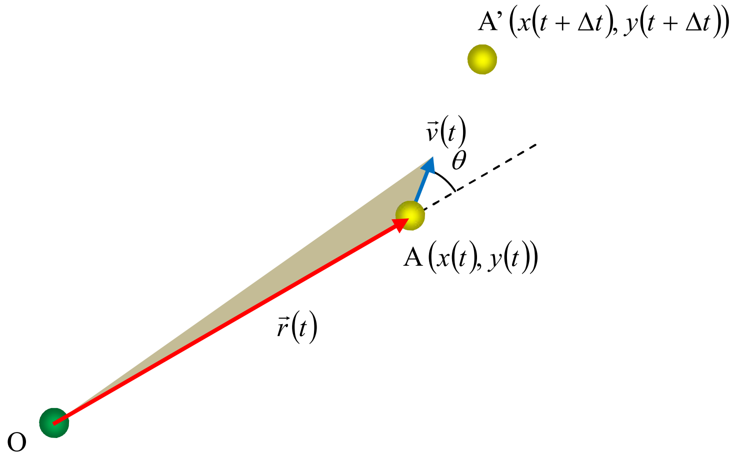
平面内に定点 O と動点 P があるとき，

定点 O と動点 P を結ぶ線分 OP（「動径 OP」という）が単位時間に描く面積を

「動点 P の定点 O に関する面積速度の大きさ」という。

定点 O まわりを回る面積速度の導き方

導き方 1



動点 P が xy 座標平面上を時刻 t から $t+\Delta t$ の間に，

点 A $(x(t), y(t))$ から点 A'　$(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$ まで移動するとする。

ここで，点 A における点 P の定点 O に関する面積速度の大きさを求める目的で，

Δt を無限小にした極限（$\Delta t \to 0$）をとると，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{(t+\Delta t)-t} = \frac{dx}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{(t+\Delta t)-t} = \frac{dy}{dt}$$

よって，点 A における動点 P の速さを $v(t)$ とすると，

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

（補足　$\int_t^{t+\Delta t} v(t)dt$ は A から A'までの道のりを表す）

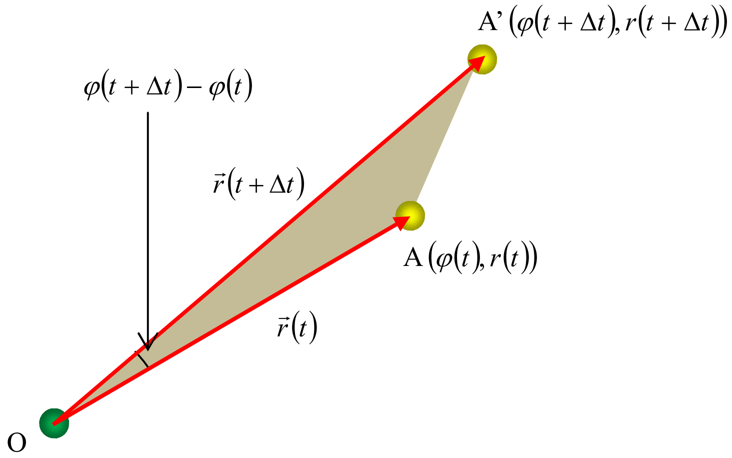
また，その運動の向きは，$\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{dy}{dx}$

ここで, 点 A における動点 P の運動の向きと動径 $\vec{r}(t)$ のなす角を θ，$|\vec{r}(t)| = r(t)$ とおくと，

点 A における動点 P の定点 O に関する面積速度の大きさ $h(t)$ は,

$$h(t) = \frac{1}{2} r(t) v(t) \sin\theta \qquad ・・・①$$

導き方 **2**



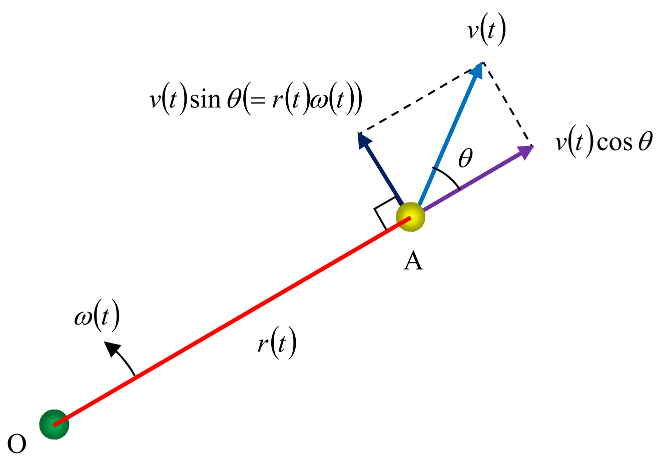
Δt を無限小にした極限（$\Delta t \to 0$）をとると，AA'は直線と見なしてよいので，
A $(\varphi(t), r(t))$，A' $(\varphi(t+\Delta t), r(t+\Delta t))$ とすると，

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{dS}{dt} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} r(t) \cdot r(t+\Delta t) \sin(\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t))}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\Delta r \to 0} r(t) \cdot r(t+\Delta t) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t))}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2} r^2(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2} r^2(t) \frac{d\varphi}{dt}
\end{aligned}
$$

$\frac{d\varphi}{dt}$ は時刻 t の角速度を表すから，$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t)$ とおくと，$h(t) = \frac{1}{2} r^2(t)\omega(t)$ ・・・②

また，①，②より，$r(t)\omega(t) = v(t)\sin\theta$

つまり，$r(t)\omega(t)$ は，点 A における動点 P の速度の動径に垂直な成分を表す。



B. 回転運動の勢い（角運動量）と面積速度

角運動量は回転運動の勢い

質点の質量を m，動径（回転軌道半径）を r，

質点の速度の動径に垂直な成分（質点の軌道の接線成分）を v_t とすると，

質点の回転運動の勢いは，並進運動の運動量 mv_t の項と動径 r の項の積で表され，

角運動量と呼ばれる。角運動量は一般に L で表されるので，

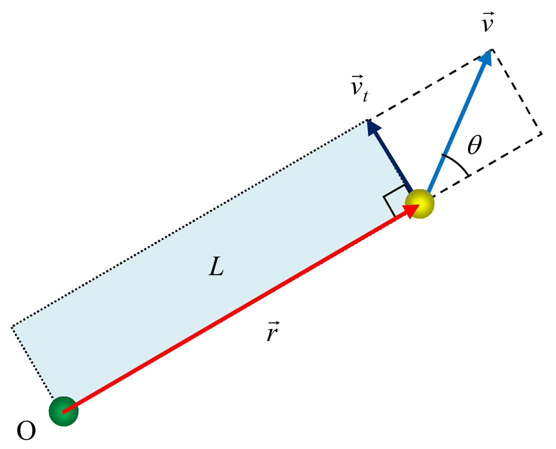
$L = mrv_t$ ・・・③

ただし，角運動量は正負の値をとるものとし，

質点が中心 O のまわりに反時計まわりするときを正とする。

また，質点の速度 $\vec{v}$ と動径ベクトル $\vec{r}$ のなす角が θ ならば，

$L = mrv\sin\theta$ となる。



力のモーメントは角運動量を変化させる原因となる

並進運動の場合

外力 F による力積は並進運動の運動量に変化を与え，

$m\Delta v = F\Delta t$

の関係が成り立つ。

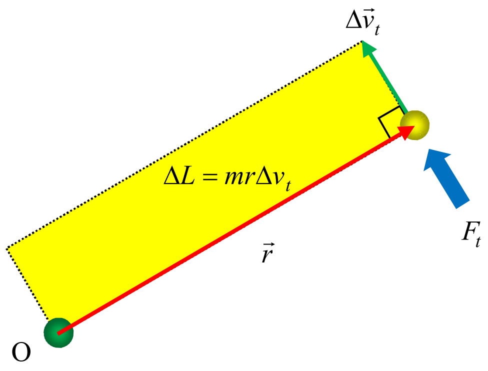
回転運動の場合

動径に垂直な外力 F_t による力のモーメント $F_t r$ とそれを加えた時間 Δt の積は

角運動量に変化を与え，

$mr\Delta v_t = F_t r\Delta t$ ・・・④

の関係が成り立つ。



角加速度

$mr\Delta v_t = F_t r\Delta t$， $v_t = r\omega$ より， $mr^2\Delta\omega = F_t r\Delta t$

$$\therefore mr^2\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = F_t r$$

$$\therefore mr^2\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}F_t r$$

$$\therefore mr^2\frac{d\omega}{dt} = F_t r$$

$\dfrac{d\omega}{dt}$ は角速度の変化率を表すので，角加速度と呼ばれ， $\dfrac{d\omega}{dt} = \beta$ とおくと，

$mr^2\beta = F_t r$ ・・・⑤

また，回転角度 θ， 角速度 ω， 角加速度 β の間に次の関係が成り立つ。

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

慣性モーメントと運動方程式

ここで，力のモーメント $F_t r$ を N とおくと，

⑤は，

$mr^2\beta = N$ ・・・⑥

と表される。

一方，外力 F を受けて加速度 α で並進運動している質点の運動方程式は，

$m\alpha = F$ ・・・⑦ （ニュートンの運動の第 2 法則）であり，

⑦の質量 m は並進運動の起こし難さと止め難さ（慣性）を表すので慣性質量という。

これに対し，⑦の m と対応する⑥の mr^2 は回転運動の起こし難さと止め難さを表すので慣性モーメントといい，記号 I で表される。

よって，⑥は一般に

$I\beta = N$ ・・・⑧

と表される。

したがって，⑧は回転運動の運動方程式といえる。

角運動量保存則

角運動量 $L = mrv_t$ が保存されるとき

角運動量変化 $\Delta L = mr\Delta v_t = 0$ である。

これと $mr\Delta v_t = F_t r\Delta t$ から， $F_t r = 0$ $\therefore F_t = 0\ (\because r \neq 0)$

また， $F_t r$ は動径 r に働く力のモーメント N のことだから，

「$N = 0$ のとき角運動量が保存される」

ともいえる。

いずれにせよ，質点に外力が働いていても，

その向きが中心の向きのみであれば， $N = 0$ より，角運動量が保存される。

さらに， $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \frac{dv_t}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\beta$， $\Delta v_t = 0$ より，角加速度 $\beta = 0$

よって，角運動量が保存されるとき，動径は等角速度運動をする。

以上より，

質点に働く力のモーメントが 0（外力の向きが動径と平行）のとき角運動量が保存され，このとき動径は等角速度運動をする。

角運動量が保存される運動の代表例

万有引力，点電荷による静電気力など中心力のみを受けての回転運動

補足 1

③の角運動量$L = mrv_t$は，$L = mrv_t = mr \cdot r\omega = mr^2\omega = I\omega$と変形できるので，

$L = I\omega$とも表す。

$L = I\omega$と並進運動の運動量$p = mv$と比較すると，

ωとvが対応関係にあることがわかる。

補足 2

中心力

質点に働く力の作用線が常に特定の点を通り，

力の大きさが質点とその点との距離によって決まるとき，

この力を中心力，特定の点を中心という。

質点が中心力のみで運動するとき，

つまり，力の中心のまわりの角運動量が保存され，

その結果，軌道は一平面上にあって，

力の中心と質点を結ぶ動径が描く面積速度が一定となる。

中心力が引力の例

万有引力，原子核のまわりをまわる電子

中心力が斥力の例

陽子やα粒子（He の原子核）が他の元素の原子核の近傍に来たとき

原子核から受ける斥力

角運動量保存則と面積速度一定の法則（ケプラーの第 2 法則）

角運動量が保存されるとき$\Delta L = m\Delta(rv_t) = 0$より，$\Delta(rv_t) = 0$

これを$\dfrac{1}{2}$倍すると，面積速度の変化$\Delta S = \dfrac{1}{2}\Delta(rv_t) = 0$となる。

よって，面積速度一定の法則が成り立つ。

回転運動の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}m{v_t}^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

並進運動と回転運動の比較

	並進運動	回転運動
慣性	質量 m	慣性モーメント I
変位	変位 x	回転角 θ
速度	速度 $v=\dfrac{dx}{dt}$	角速度 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$
加速度	加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}$	角加速度 $\beta=\dfrac{d\omega}{dt}$
運動方程式	$F=ma$	$N=I\beta$
運動量	$p=mv$	$L=I\omega$
運動量変化	$m\Delta v=F\Delta t$	$I\Delta\omega=N\Delta t$
仕事	F と変位 x の内積	N と角度変化 θ の積
運動エネルギー	$K=\dfrac{1}{2}mv^2$	$K=\dfrac{1}{2}I\omega^2$
速度（角速度）の式	$v=v_0+at$	$\omega=\omega_0+\beta t$
変位（回転角）の式	$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$	$\theta=\omega_0t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$
	$v^2-{v_0}^2=2ax$	$\omega^2-{\omega_0}^2=2\beta\theta$
運動量保存則の成立条件	外力の和が 0	外力のモーメントの和が 0

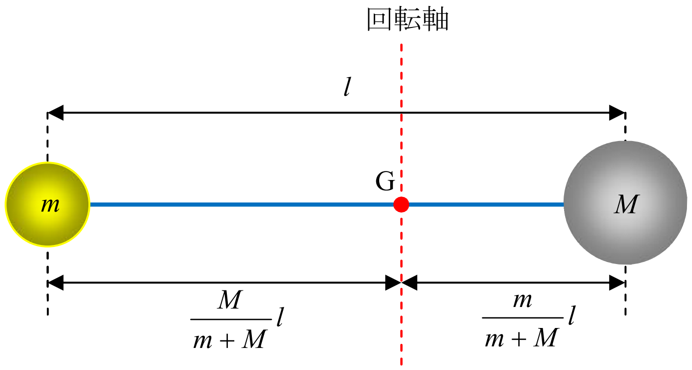
剛体の慣性モーメント

剛体の慣性モーメント I は個々の質点の慣性モーメントの和から求めることができる。

$$I=\sum m_i r_i^{\,2}$$

例 1

質量が無視できる棒につながれた質量 m と質量 M の質点が重心 G を通り，
2 物体を結ぶ線分に垂直な直線を軸として回転するとき

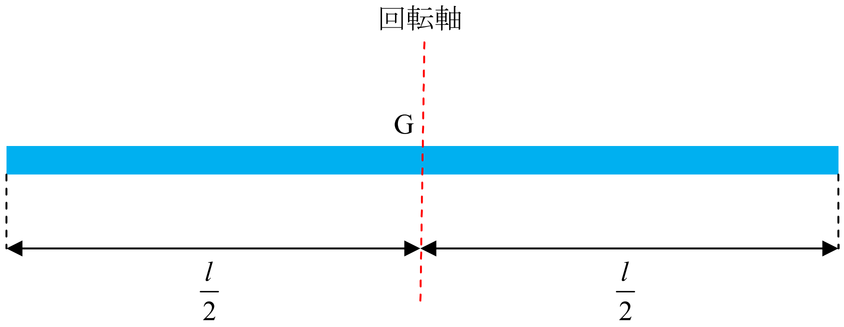


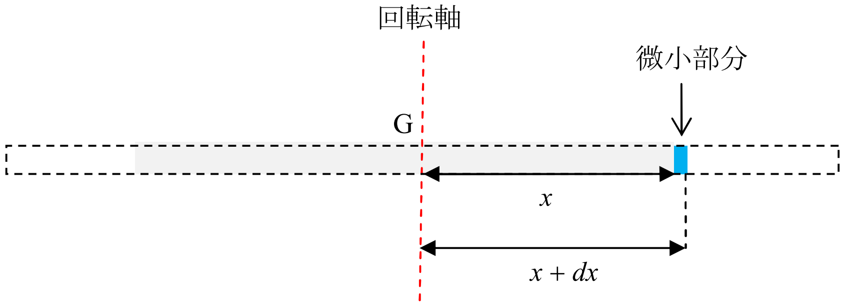
重心 G のまわりの慣性モーメント $I=m\left(\frac{M}{m+M}l\right)^2+M\left(\frac{m}{m+M}l\right)^2=\frac{mM}{m+M}l^2$

$$\therefore I=\frac{mM}{m+M}l^2$$

例 2

質量M，長さlの一様な十分細い棒の重心を通り，
棒と垂直な直線を軸として回転するとき





微小部分の質量

線密度$\dfrac{M}{l}$より，$\dfrac{M}{l}(x+dx)-\dfrac{M}{l}x=\dfrac{M}{l}dx$

微小部分の慣性モーメント

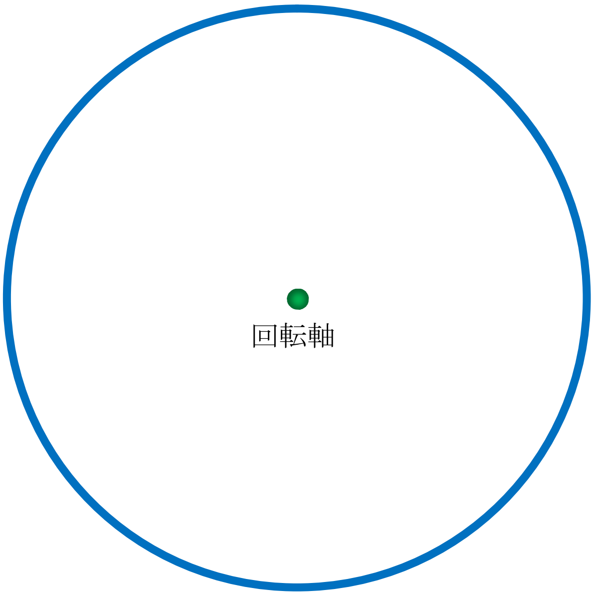
$$dI=\frac{M}{l}dx\cdot x^2=\frac{M}{l}x^2dx$$

棒の慣性モーメント

$$I=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}dI=2\int_0^{\frac{l}{2}}dI=2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{M}{l}x^2dx=2\left[\frac{M}{3l}x^3\right]_0^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{12}Ml^2$$

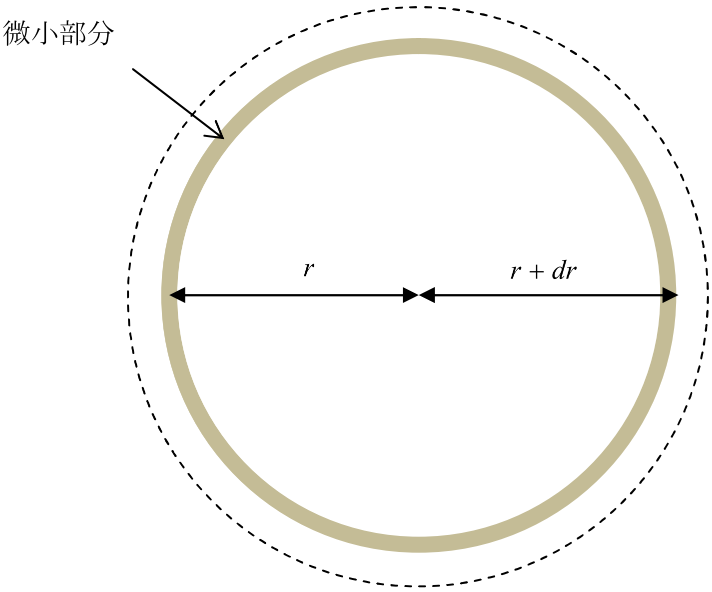
例 3

質量 M の太さが無視できる半径 R の円輪の中心を通り，
円輪がつくる面と垂直な直線を軸として回転するとき



$$I=\sum m_i r^2 = r^2 \sum m_i = r^2 M \qquad \therefore I = Mr^2$$

例 4：半径 R，質量 M の円板の中心を通り，円板と垂直な直線を軸として回転するとき



微小部分の質量

面密度 $\dfrac{M}{\pi R^2}$ を ρ とおくと，

$\pi\rho(r+dr)^2-\pi\rho r^2=2\pi\rho rdr+\pi\rho(dr)^2$

$(dr)^2$ の項は非常に小さいので無視してよい。よって，微小部分の質量＝$2\pi\rho rdr$

微小部分の慣性モーメント

太さ dr が無視できる円輪と見なしてよいから，

例 2 より， $dI=2\pi\rho rdr\cdot r^2=2\pi\rho r^3dr$

円板の慣性モーメント

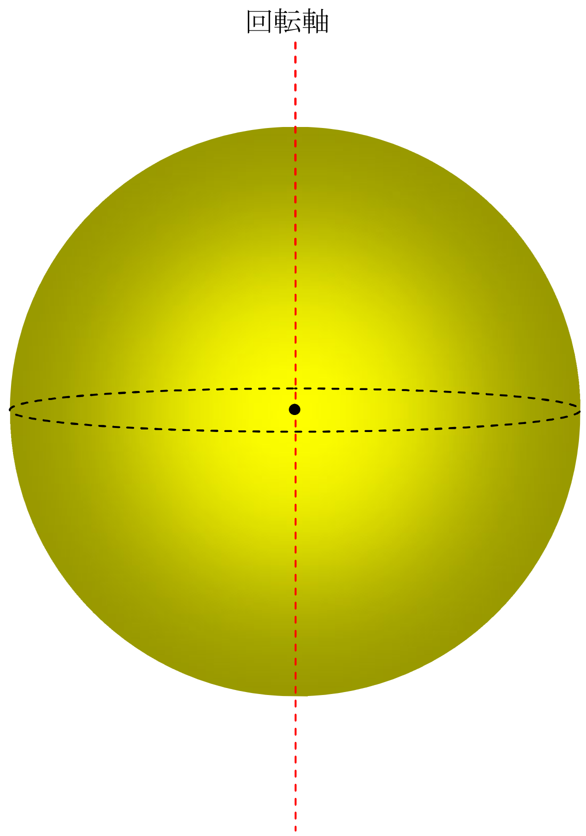
$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^R dI\\
&=\int_0^R 2\pi\rho r^3dr\\
&=2\pi\rho\int_0^R r^3dr\\
&=2\pi\rho\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R\\
&=\frac{1}{2}\pi\rho R^4\\
&=\frac{1}{2}(\pi R^2\rho)R^2
\end{aligned}
$$

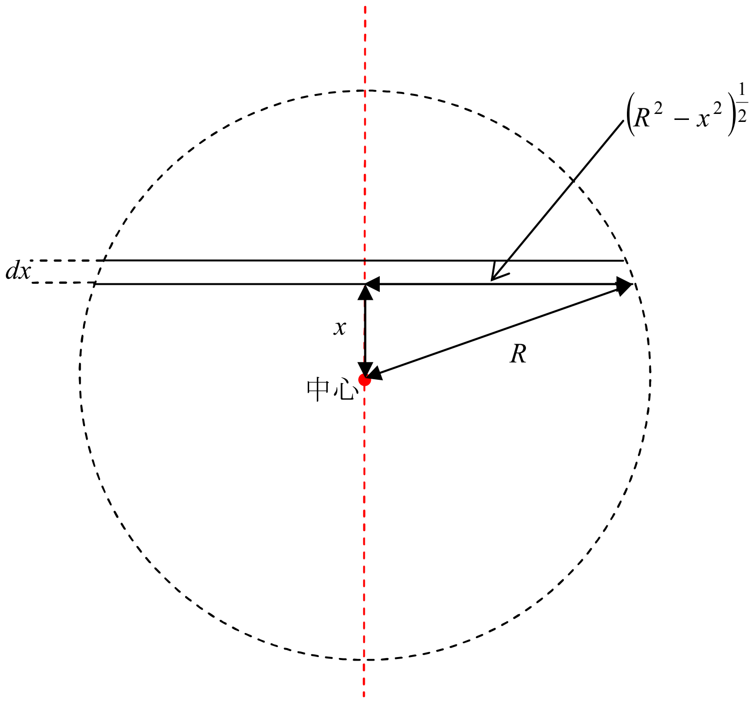
$M=\pi R^2\rho$ より，

$$I=\frac{1}{2}MR^2$$

例 5

質量 M， 半径 R の一様な球の中心を通る直線を軸として回転するとき





球を厚さ dx の十分薄い円板を組み合わせたものと見なし，円板の密度 $\dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ を ρ とおく。

中心からの距離が x の位置にある円板の質量

$$\pi\left\{\left(R^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 dx\cdot\rho=\pi\rho\left(R^2-x^2\right)dx$$

円板の慣性モーメント

例 4 より，$dI=\dfrac{1}{2}\pi\rho\left(R^2-x^2\right)dx\cdot\left\{\left(R^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2=\dfrac{1}{2}\pi\rho\left(R^2-x^2\right)^2$

球の慣性モーメント

$$\begin{aligned}
I&=2\int_0^R dI\\
&=2\int_0^R\frac{1}{2}\pi\rho\left(R^2-x^2\right)^2dx\\
&=\pi\rho\int_0^R\left(x^4-2R^2x^2+R^4\right)dx\\
&=\pi\rho\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}R^2x^3+R^4x\right]_0^R\\
&=\frac{8}{15}\pi\rho R^5
\end{aligned}$$

これと $\rho=\dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\dfrac{3M}{4\pi R^3}$ より，

$$I=\frac{2}{5}MR^2$$