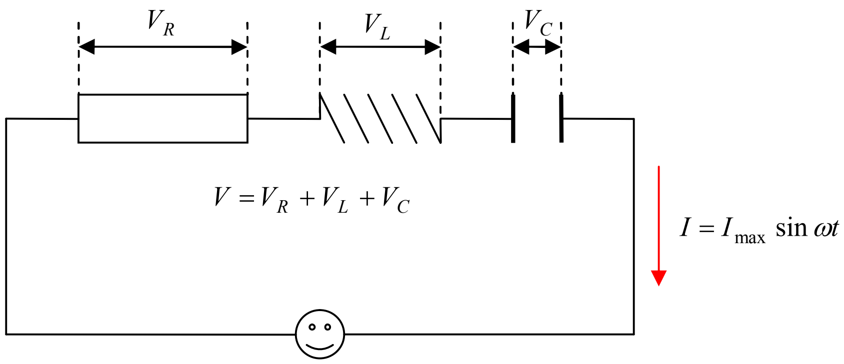
LCR 直列回路と共振周波数

LCR 直列回路を流れる電流Iを$I = I_{\max} \sin \omega t$とし，
このとき，交流電源の起電力Vが$V = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$であるとする。
ここで$V_{\max}$を一定に保ち，角振動数ωだけを変えていくと，
ある角振動数ω_0において回路のインピーダンス，つまり交流回路の抵抗が最小となり，
その結果，最大の電流が回路を流れることになる。
この現象を直列共振，また，角振動数ω_0を与える周波数を共振周波数という。
（共振周波数をf_0とすると，$\omega_0 = 2\pi f_0$）

共振周波数を求める

コイルの電圧をV_L，コンデンサーの電圧をV_C，オーム抵抗の電圧をV_R，
電流を$I = I_{\max} \sin \omega t$，交流電源の起電力を$V = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$（$V_{\max}$は一定）とする。
キルヒホッフの第二法則より，

$$
\begin{aligned}
V_{\max} \sin(\omega t + \varphi) &= V_R + V_L + V_C \\
&= RI_{\max} \sin \omega t + \omega L I_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_{\max}}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= I_{\max} \left\{ R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cos \omega t \right\} \\
&= I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$



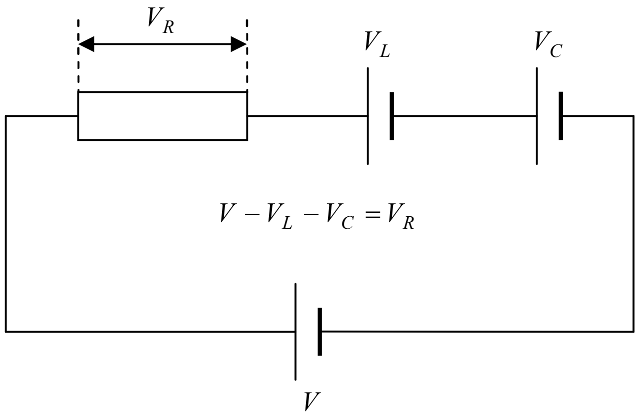
$V = V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$

補足図

コイルとコンデンサーをそれぞれ起電力V_LとV_Cの電池に例えると，

電源の起電力の向きと逆向きだから，

キルヒホッフの第二法則より，$V - V_L - V_C = V_R \quad \therefore V = V_R + V_L + V_C$



よって，

$$V_{\max} = I_{\max}\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\omega}$$

また，$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ は回路の抵抗にあたり，これをインピーダンスという。

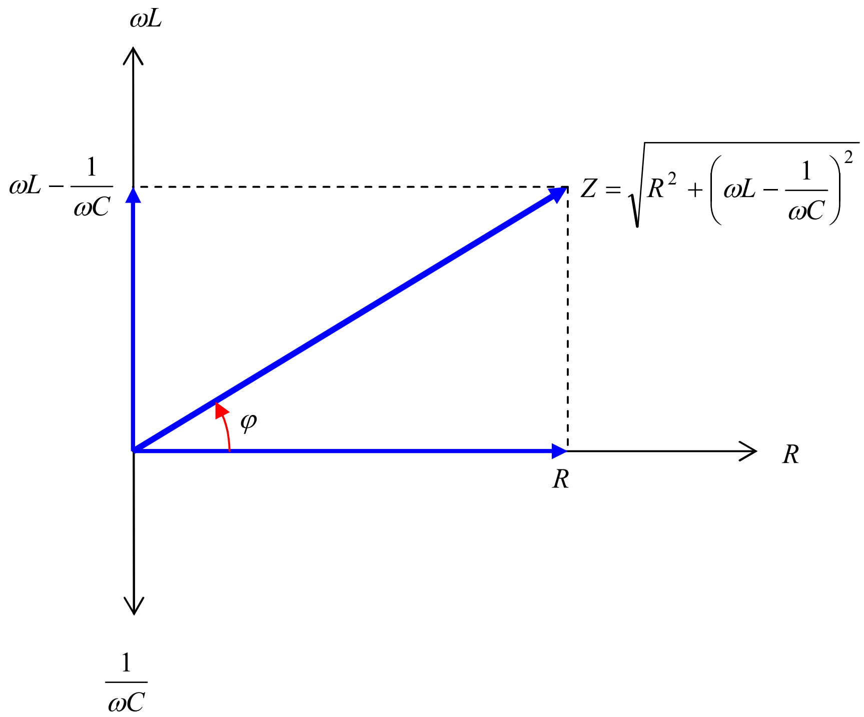
インピーダンスは記号Zを使って表すので，$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ となる。

ここで，

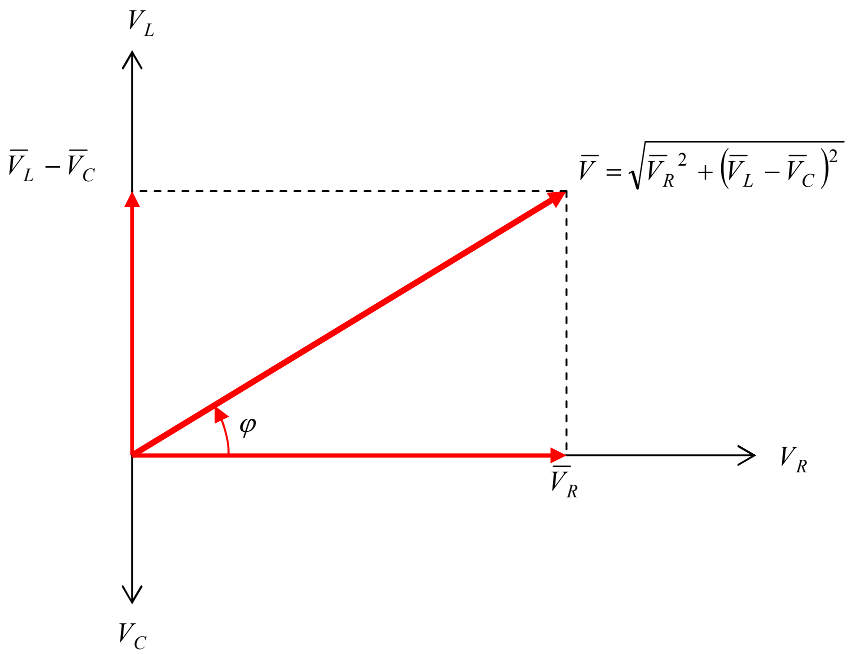
V_Rの位相を横軸にとると，V_Lの位相はV_Rより$\frac{\pi}{2}$進み，V_Cの位相は$\frac{\pi}{2}$遅れるから，

インピーダンスZ，オーム抵抗R，誘導リアクタンスωL，容量リアクタンス$\frac{1}{\omega C}$の

関係は次のように図示することができる。



また，起電力と電圧の実効値を$\overline{V}$，$\overline{V}_L$，$\overline{V}_C$，$\overline{V}_R$とすると，下図のようになる。



ここで$V_{\max}$は一定という条件の下，$I_{\max}$が最大値をとるのは，

$V_{\max} = I_{\max}\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ より，

$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ が最小値をとるとき，すなわち$\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0$になるときである。

このときの角振動数をω_0とすると，$\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C} = 0$ より，$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

よって，共振周波数をf_0とすると，$f_0 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{LC}}$