ばねのつなぎ方と合成ばね定数

弾性力

ばねなど弾性体が外力により変形すると，弾性体には元に戻ろうとする力が生じる。
この力を「弾性力」または単に「弾力」という。

ばねの弾性力の大きさ（フックの法則）

ばねの弾性力の大きさ$|F|$は，
ばねの自然長からの変位の大きさ（伸びや縮みの長さ）$|x|$に比例し，
比例定数をkとすると，
$|F|=k|x|$　（比例定数$\boldsymbol{k}$をばね定数という）
と表される。
これをフックの法則という。
ちなみにフックはコルクの軽さと強さに興味をもち，自ら作った顕微鏡でコルクを観察し，発見した空洞を cell（細胞）と名付けたことで，どの高校生物教科書にも取り上げられている。

弾性力 $\boldsymbol{F}$ と変位 $\boldsymbol{x}$ の関係式

ばねが伸びたときの弾性力の向きは縮む向き，
ばねが縮んだときの弾性力の向きは伸びる向き
より，
変位xと弾性力Fの向きは互いに逆向きである。
よって，
弾性力と変位の関係式は，$F=-kx$ と表される。

ばねのつなぎ方と合成ばね定数

複数つないだばねを 1 つのばねと見なしたときのばね定数を合成ばね定数という。

ばねを直列につないだときの合成ばね定数

ばね定数がk_1（青），k_2（茶），k_3（赤）のばねを直列につなぎ（図 1 上段），
大きさFの外力で引くと，それぞれのばねの伸びがx_1，x_2，x_3となって力がつり合ったとすると（図 1 中段），各接触点では作用反作用の力により力の大きさがつり合うから，
$F=k_3x_3$，$k_3x_3=k_2x_2$，$k_2x_2=k_1x_1$，$k_1x_1=F'$ より，
$F=k_3x_3=k_2x_2=k_1x_1=F'$
よって，$x_1=\dfrac{F}{k_1}$，$x_2=\dfrac{F}{k_2}$，$x_3=\dfrac{F}{k_3}$　・・・①

次に，これを 1 本のばねとみなし（図 1 下段），そのばね定数を k_T とすると，
ばねの伸びは $x_1+x_2+x_3$ だから，
$k_T(x_1+x_2+x_3)=F$ より，

$$x_1+x_2+x_3=\frac{F}{k_T} \quad ・・・②$$

①，②より，

$$\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}+\frac{F}{k_3}=\frac{F}{k_T}$$

よって，

$$\frac{1}{k_T}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}$$

これを一般化すると，

$$\frac{1}{k_T}=\sum_{i=1}\frac{1}{k_i}$$

とくに，ばね定数が同じばねを n 本直列につないだ場合，ばね定数を k とすると，

$\dfrac{1}{k_T}=\dfrac{n}{k}$ より，$k_T=\dfrac{k}{n}$

つまり，直列につなぐばねの数を 2,3,4,…本としていくと，
合成ばね定数 k_T は，$\dfrac{k}{2},\dfrac{k}{3},\dfrac{k}{4},\cdots$ と本数の逆数に比例して小さくなっていく。

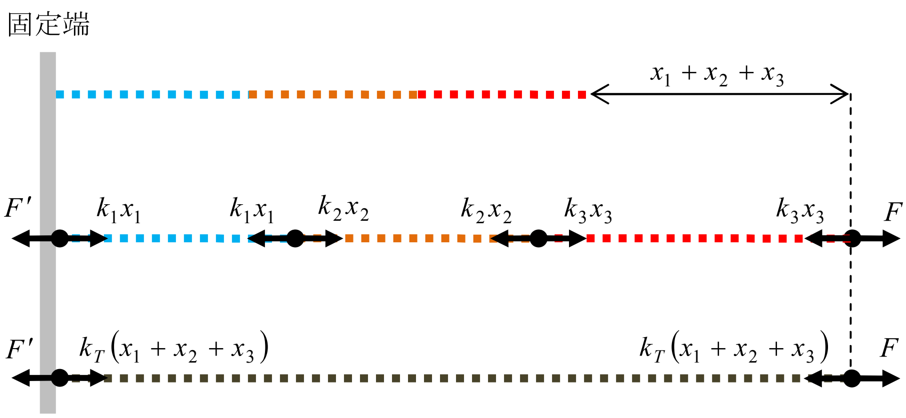

図 1

ばねを並列につないだときの合成ばね定数

ばね定数が k_1（青），k_2（茶），k_3（赤）のばねを束ねて，大きさ F の外力で引くと，伸びが x のとき，力がつり合ったとする（図 2）。

このとき，

$k_1x+k_2x+k_3x=F$　・・・③

が成り立つ。

束ねたばねを 1 本のばねと見なし，そのばね定数を k_T とすると，

$k_Tx=F$　・・・④

③，④より，

$k_Tx=k_1x+k_2x+k_3x$

よって，

$k_T=k_1+k_2+k_3$

これを一般化すると，

$$k_T=\sum_{i=1}k_i$$

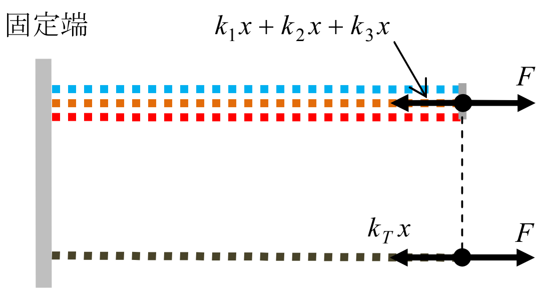

図 2

間に物体をはさんだときの合成ばね定数

自然長の状態の 2 つのばねが，間に物体をはさんで，つながっている（図 3-1）。
（ばね定数：k_1（青），k_2（茶））
この物体をばねの向きに大きさ F の外力で引いたときの変位の大きさを x とする（図 3-2）。
このときの力のつり合いは，

$k_1 x + k_2 x = F$　・・・⑤

このばねを 1 本のばねと見なし，そのばね定数 k_T とすると（図 3-3 あるいは図 3-4），

$k_T x = F$　・・・⑥

⑤，⑥より，

$k_T x = k_1 x + k_2 x$

よって，

$k_T = k_1 + k_2$

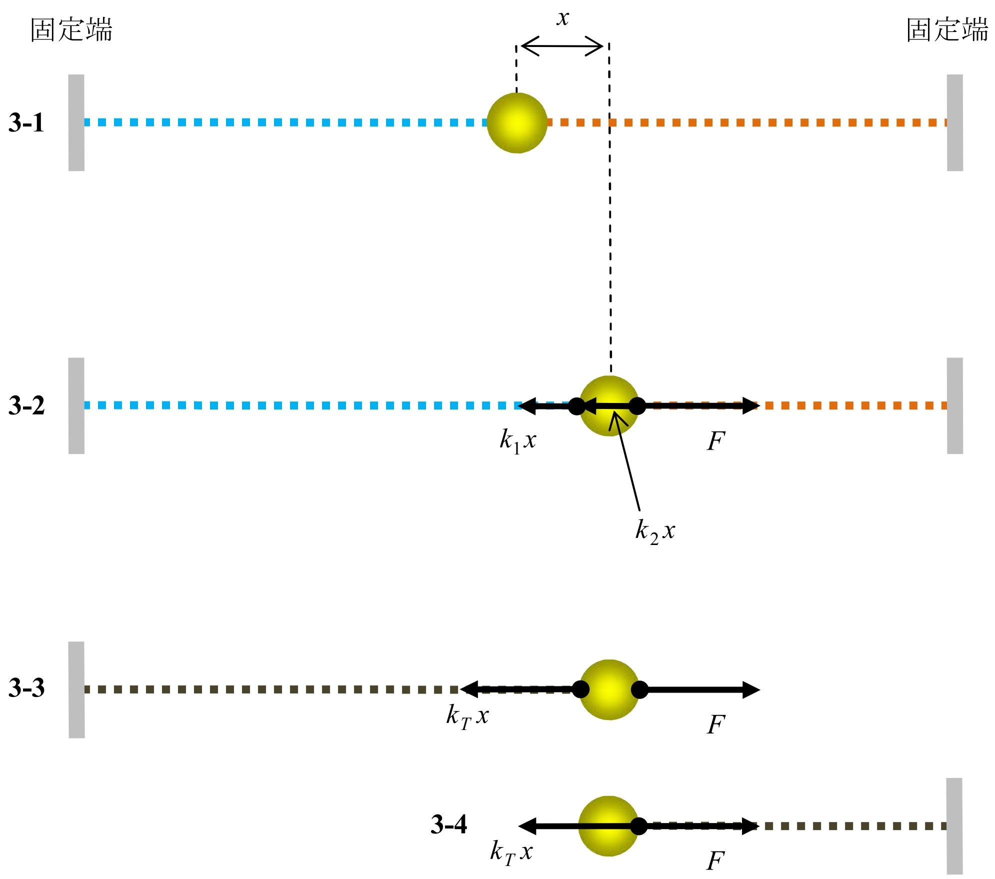

図 3

図 3-1 は単振動問題でよく見かけるタイプの図であるが，
図 3-3 あるいは図 3-4 のようにデフォルメするとわかりやすくなる。