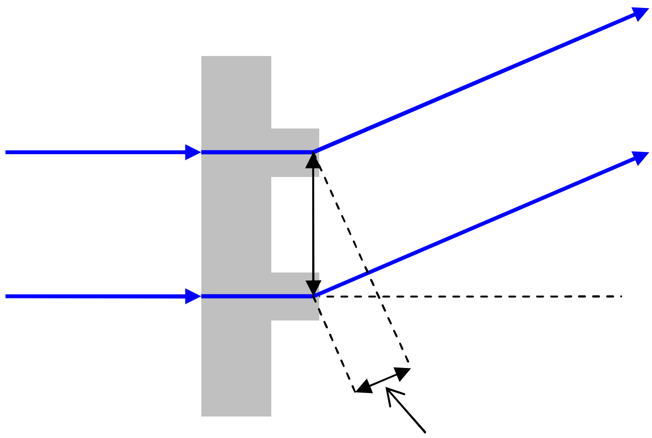
合成波の方程式を図形を利用して求める方法

m 次の明線と m+1 次の明線の間の回折光の干渉を例に



m 次の明線と m+1 次の明線の間の回折光

隣り合うスリットからの回折光の光路差は,
m 次の明線ができる場合は $m\lambda$, $(m+1)$ 次の明線ができる場合は $(m+1)\lambda$ だから,
それぞれの位相は $2m\pi$, $2(m+1)\pi$ である。
よって, m 次の明線と $(m+1)$ 次の明線の間の回折光の場合,
隣り合うスリットからの回折光の光路差の位相は, $2m\pi+\delta$ $(0<\delta<2\pi)$ と表わせる。
ゆえに, このときのスリット 1 からの回折光とスリット 1 から数えて k ($k=1,2,3,\cdots$) 番目の
スリット(以後『スリット k 』)からの回折光の光路差の位相は $2m\pi+(k-1)\delta$ である。
以上から,
スリット 1 からの回折光のスクリーン上の観測点における変位 y_1 を

$y_1=A_0\sin(\omega t+\alpha)$ (A_0 は振幅, ω は角振動数で単振動の周期を T とすると $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$)とすると,

その位相は $\omega t+\alpha$ だから, スリット k からの回折光の変位 y_k は,

$y_k=A_0\sin\{\omega t+(k-1)\delta+\alpha\}$ となる。

よって, スリット 1 からスリット N までの N 本の回折光の合成波の変位を Y_S とすると,

$$Y_\mathrm{S}=\sum_{k=1}^{N}y_k=A_0\sum_{k=1}^{N}\sin\{\omega t+(k-1)\delta+\alpha\}$$

となる。
しかし, これを計算して Y_S の振幅と位相を求めるのは煩雑(計算方法は後述)である。
そこで, $y_k=A_0\sin\{\omega t+(k-1)\delta+\alpha\}$ をベクトルで視覚化することで,
Y_S の振幅と位相を図形的に求める方法について解説する。

方法の概要

$y_k = A_0 \sin\{\omega t + (k-1)\delta + \alpha\}$を極座標の成分表示ベクトルで表し，
これを継ぎ足していくことより，Y_Sを視覚化する。

手順 1

xy直交座標平面上に，原点Oを極，x軸方向を始線，$\omega t + (k-1)\delta + \alpha$を偏角，
A_0を動径とする極座標をとる。
すると，$y_k = A_0 \sin\{\omega t + (k-1)\delta + \alpha\}$を表す極座標を$\mathrm{A}_k$とすれば，
原点Oを中心とする半径A_0の円周上に点A_k $(A_0, \omega t + (k-1)\delta + \alpha)$がとれる。

手順 2

原点Oを定点とする位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}$を$\vec{A}_k$と表すと，$\vec{A}_k = \begin{pmatrix} \omega t + (k-1)\delta + \alpha \\ A_0 \end{pmatrix}$
また，極座標系とxy直交座標系を重ね合わせれば，
直交座標のy座標は$y = A_0 \sin\{\omega t + (k-1)\delta + \alpha\}$となることから，
スリットkからの回折光の観測点における変位y_kを表していることがわかる。

手順 3

合成波のベクトルを$\vec{A}_S$とすると，

$$\vec{A}_S = \sum_{k=1}^{N} \vec{A}_k = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \cdots + \vec{A}_k + \cdots + \vec{A}_N$$

ここで，各ベクトルを継ぎ足していけば，
その終点と極Oを結ぶ線分の長さは合成波Y_Sの振幅，
その線分と始線のなす角は合成波Y_Sの位相，
y座標がY_Sの変位を表す。
この方法は，合成波の振る舞いをアナログ的に理解するにはもってこいである。

補足

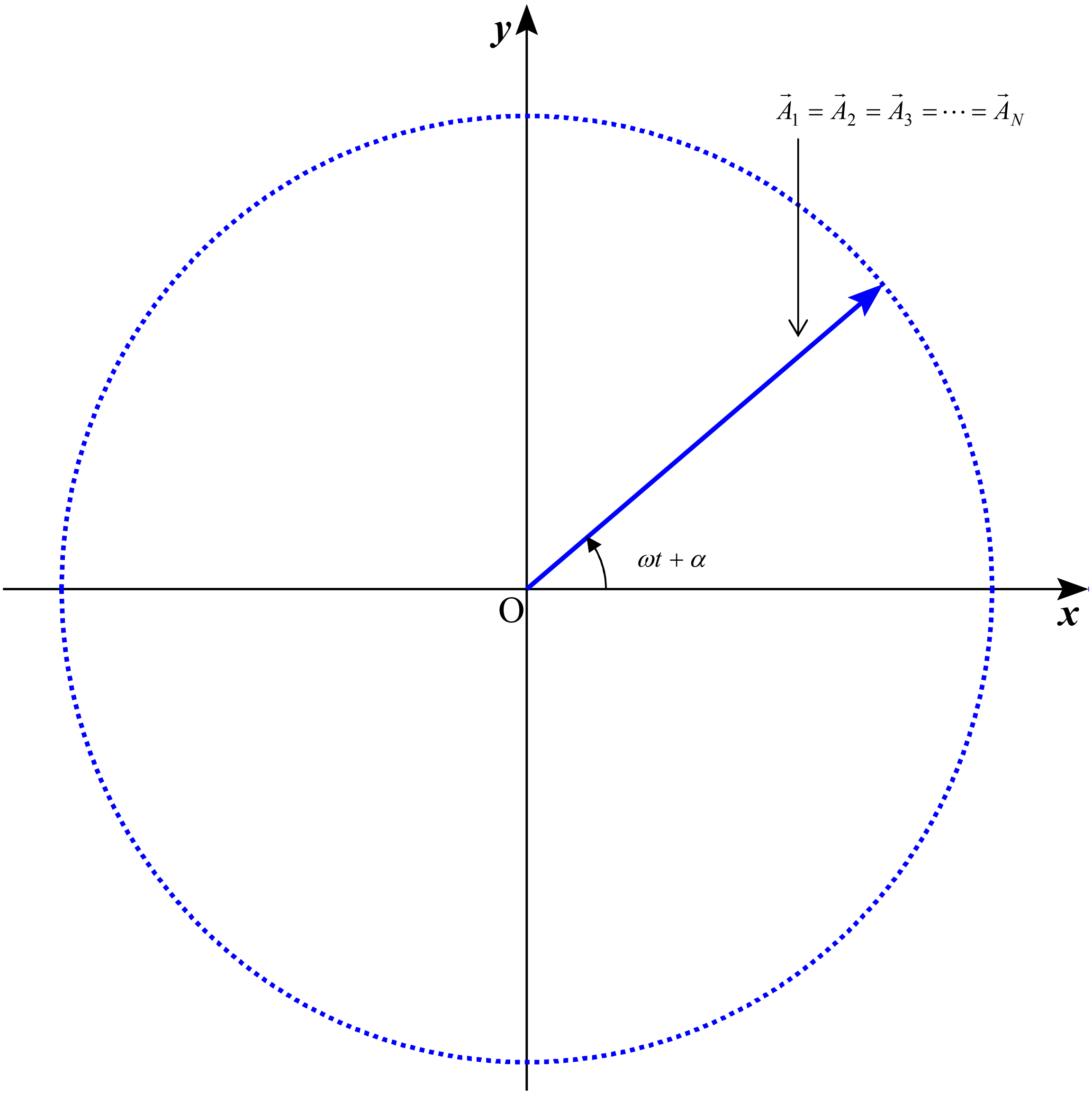
位相

三角関数の方程式$y = a \sin f(t, x)$が振動や波動の方程式の場合，
角を表す部分$f(t,\ x)$を位相とよぶ。

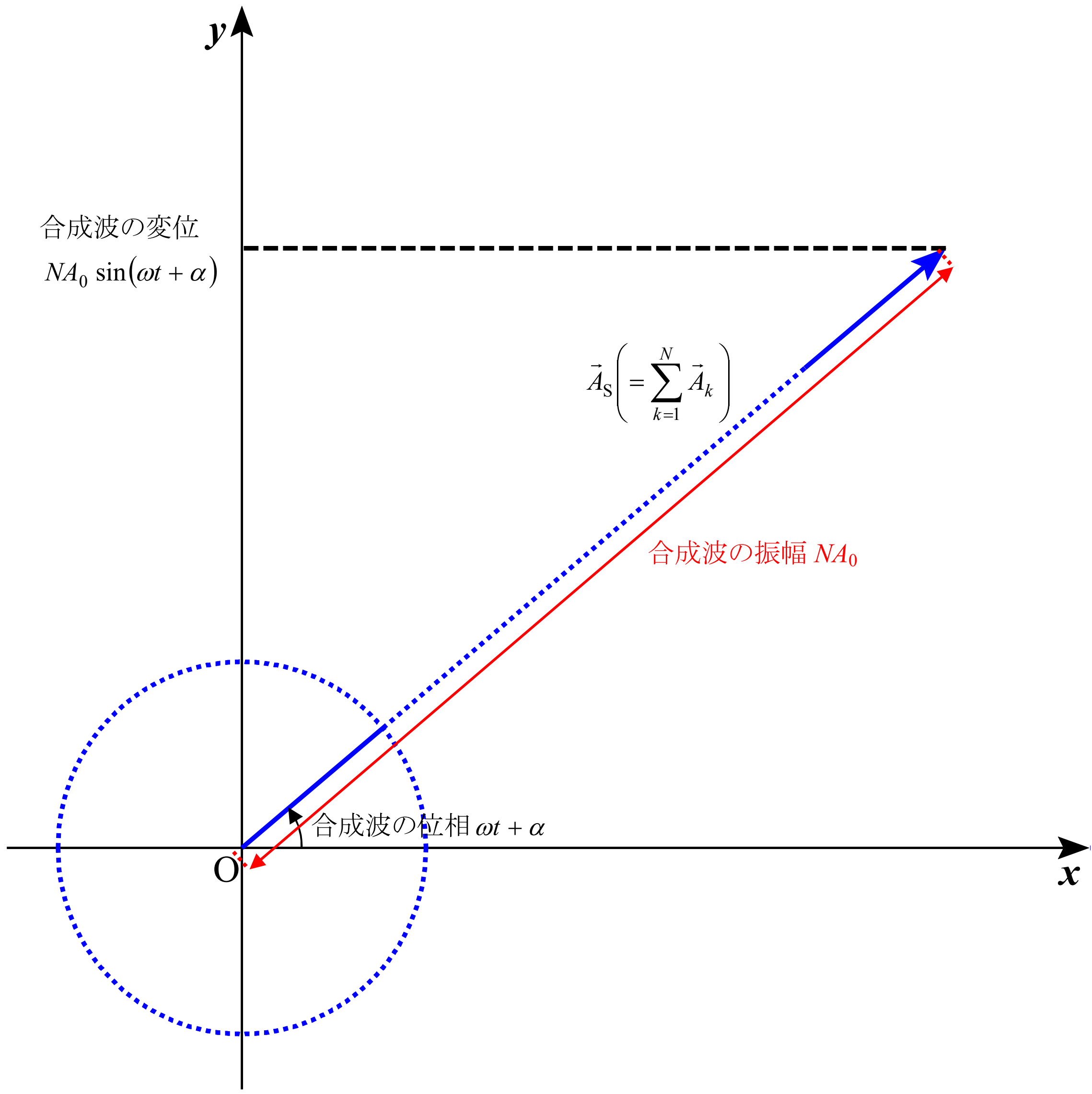
明線ができる場合

$\delta = 0$ より，$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 = \vec{A}_3 = \cdots = \vec{A}_k = \cdots = \vec{A}_N$ となるから，

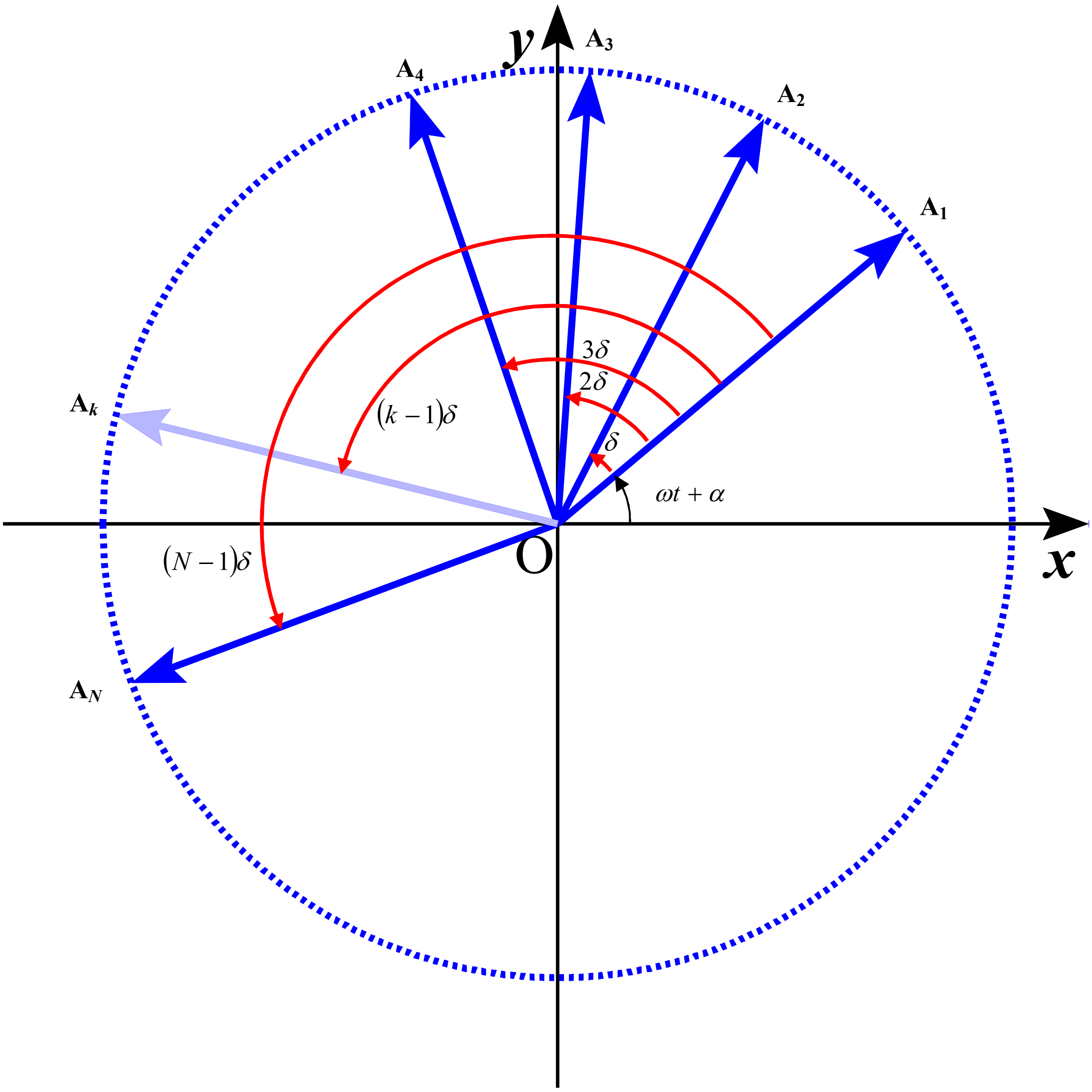
$\left|\vec{A}_{\mathrm{S}}\right| = NA_0$，位相 $\omega t + \alpha$ より，$Y_{\mathrm{S}} = NA_0 \sin(\omega t + \alpha)$ となる。



これらのベクトルを継ぎ足すと次のようになる。

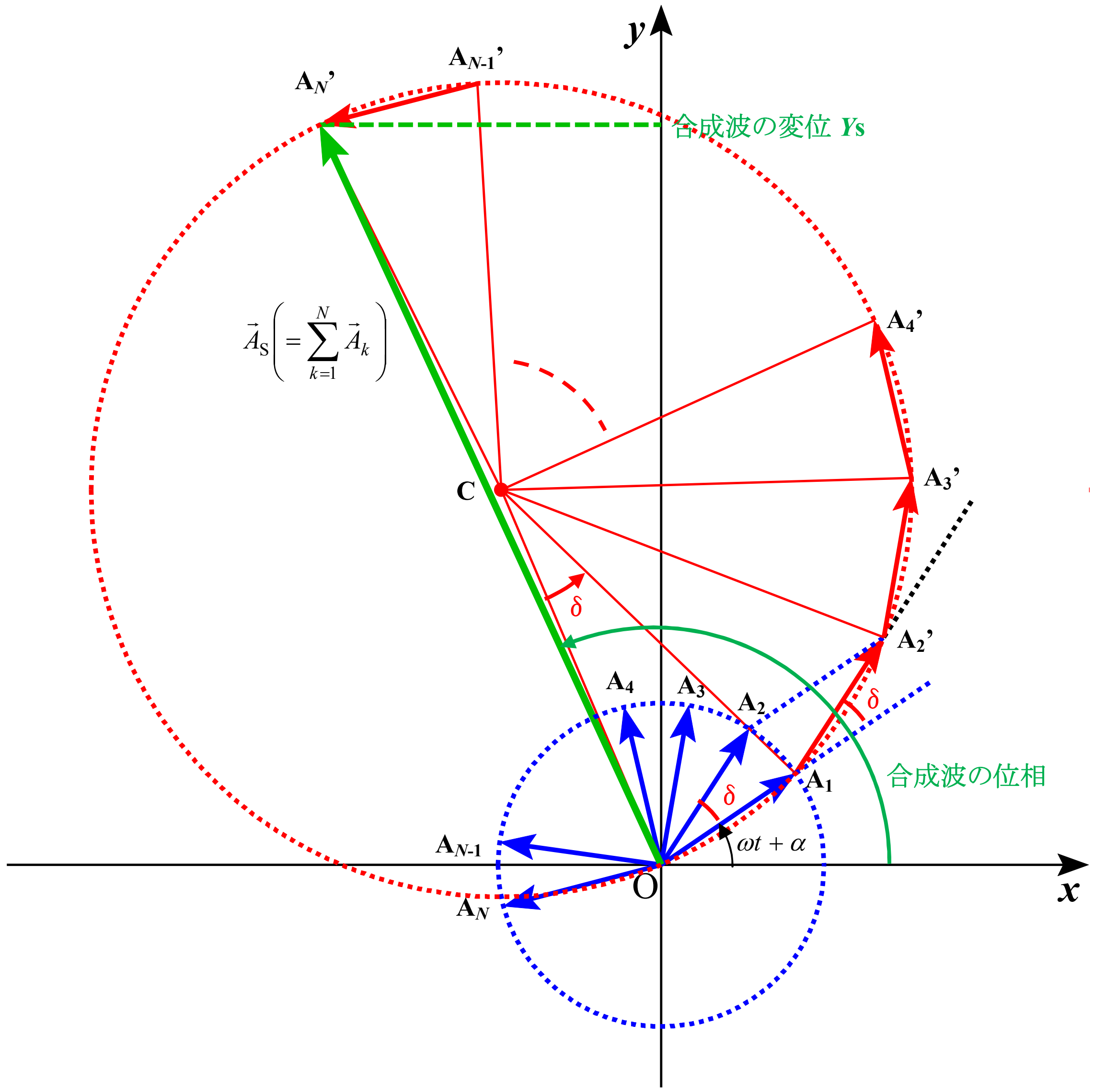


明線ができない場合



これらのベクトルを継ぎ足すと次のようになる。

$\left|\vec{A}_{\mathrm{S}}\right|$ が合成波の振幅，Y_{S} は合成波の変位，$\vec{A}_{\mathrm{S}}$ と始線のなす角が合成波の位相



合成波の位相を求めてみる

円周角と中心角の関係よりから $\angle \mathrm{A}_N{}'\mathrm{OA}_1=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{A}_N{}'\mathrm{CA}_1$

$\angle \mathrm{CA}_1\mathrm{O}$ の外角と $\Delta\mathrm{COA}_1$ の内角の関係より，$\delta+\angle\mathrm{CA}_1\mathrm{A}_2{}'=\angle\mathrm{OCA}_1+\angle\mathrm{COA}_1$　・・・①

$\Delta\mathrm{COA}_1\equiv\Delta\mathrm{CA}_1\mathrm{A}_2{}'\ (\equiv\Delta\mathrm{CA}_2{}'\mathrm{A}_3{}'\equiv\cdots\equiv\Delta\mathrm{CA}_{N-1}{}'\mathrm{A}_N{}')$ より，$\angle\mathrm{COA}_1=\angle\mathrm{CA}_1\mathrm{A}_2{}'$　・・・②

①，②より，$\angle\mathrm{OCA}_1=\delta$，$\angle \mathrm{A}_N{}'\mathrm{OA}_1=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{A}_N{}'\mathrm{CA}_1=\dfrac{(N-1)\delta}{2}$

ゆえに，合成波の位相＝$\omega t+\alpha+\dfrac{(N-1)\delta}{2}$

合成波の振幅を求めてみる

CO の長さ

$\angle \mathrm{CA_1O}$ の外角と $\Delta \mathrm{COA_1}$ の内角の関係より， $\delta + \angle \mathrm{CA_1A_2'} = \angle \mathrm{OCA_1} + \angle \mathrm{COA_1}$ ・・・①

$\Delta \mathrm{COA_1} \equiv \Delta \mathrm{CA_1A_2'} \left(\equiv \Delta \mathrm{CA_2'A_3'} \equiv \cdots \equiv \Delta \mathrm{CA_{\mathit{N}-1}'A_{\mathit{N}}'}\right)$ より， $\angle \mathrm{COA_1} = \angle \mathrm{CA_1A_2'}$ ・・・②

①，②より， $\delta = \angle \mathrm{OCA_1}$

$\Delta \mathrm{COA_1}$ の頂点 C から底辺 $\mathrm{OA_1}$ に下ろした垂線の足を H とすると，

$\mathrm{CO}\sin\angle\mathrm{OCH} = \mathrm{OH}$ より， $\mathrm{CO} = \dfrac{\mathrm{OH}}{\sin\angle\mathrm{OCH}}$

$\Delta \mathrm{COA_1}$ は $\angle \mathrm{C}$ を頂角とする二等辺三角形だから，

$\angle\mathrm{OCH} = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{OCA_1} = \dfrac{\delta}{2}$， $\mathrm{OH} = \dfrac{\mathrm{OA_1}}{2} = \dfrac{A_0}{2}$

よって， $\mathrm{CO} = \dfrac{A_0}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}$ ・・・③

OA_N' の長さ

$\Delta \mathrm{CA}_N'\mathrm{O}$ について

$0 < N\delta < 2\pi$ とすると，

$\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO} = N\delta\ (0 < N\delta < \pi)$ または $\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO} = 2\pi - N\delta\ (\pi < N\delta < 2\pi)$ ・・・④

頂点 C から底辺 OA_N' に下ろした垂線の足を M とすると， $\mathrm{OM} = \mathrm{CO}\sin\angle\mathrm{OCM}$

$\Delta \mathrm{CA}_N'\mathrm{O}$ は $\angle \mathrm{C}$ を頂角とする二等辺三角形であるから，

二等辺三角形の性質より， $\angle\mathrm{OCM} = \dfrac{\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO}}{2}$， $\mathrm{OA}_N' = 2\mathrm{OM}$

よって， $\mathrm{OA}_N' = 2\mathrm{CO}\sin\dfrac{\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO}}{2}$

④をこれに代入すると， $\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO}$ が $N\delta$ と $2\pi - N\delta$ のいずれの場合においても

$\mathrm{OA}_N' = 2\mathrm{CO}\sin\dfrac{N\delta}{2}$

これと③より， $\mathrm{OA}_N' = 2\cdot\dfrac{A_0}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}\sin\dfrac{N\delta}{2} = A_0\cdot\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$

また， $N\delta = 2\pi$ のとき， A_N' は O と一致するから， $\mathrm{OA}_N' = 0$

これは上式を満たす。

ゆえに， $\mathrm{OA}_N' = A_0\cdot\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\ (0 < N\delta \leq 2\pi)$

合成波の振幅

$\mathrm{OA}_N{}'$を一般化すると，$\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = A_0\left|\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\right|$ （$N\delta$ は任意の実数， $\delta \neq 0$）

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = A_0 \lim_{\delta\to 0}\left|\frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\right| = A_0 \lim_{\delta\to 0}\left|\frac{\dfrac{\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\dfrac{N\delta}{2}}\cdot N\right| = NA_0$$

これと $\delta = 0$ のときの合成波の振幅が NA_0 であることから，

$\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = A_0\left|\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\right|$ は $\delta = 0$ において連続である。

よって，

$\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = A_0\left|\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\right|$ （$N\delta$ は任意の実数）

合成波の式を求めてみる

以上より，

m 次の明線と $m+1$ 次の明線の間の回折光の合成波の式は，

$$Y_\mathrm{S} = A_0\frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\sin\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta + \alpha\right)$$

振幅：$\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = A_0\left|\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\right|$， 位相 ： $\omega t + \dfrac{N-1}{2}\delta + \alpha$

また，これより，

$\dfrac{N\delta}{2} = n\pi$ のとき，すなわち $\delta = \dfrac{2n\pi}{N}$ のとき，

振幅が 0 になることが，すなわちスクリーン上に暗線ができることがわかる。

$Y_{\mathrm{S}}=A_0\sum_{k=1}^{N}\sin\{\omega t+(k-1)\delta+\alpha\}$から，合成波$Y_{\mathrm{S}}$の振幅と位相を求める。

初期位相を$\alpha=0$としても合成波の振幅は変わらないから，

簡単のため$\alpha=0$の場合で考える。

数学（数列）で分数形の数列の和を部分分数分解を利用して解くことを学んだ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

この方法を一般化すると，$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1$であり，

三角関数の場合，積形の三角関数を，積和の公式を使って，和の形に変形できるから，

この方法を利用することができる。

まず$Y_{\mathrm{S}}=A_0\sum_{k=1}^{N}\sin\{\omega t+(k-1)\delta\}$の両辺に$\frac{2}{A_0}\sin\theta$をかけ，右辺の三角関数を積形にする。

$$Y_{\mathrm{S}}\cdot\frac{2}{A_0}\sin\theta=A_0\sum_{k=1}^{N}\sin\{\omega t+(k-1)\delta\}\times\frac{2}{A_0}\sin\theta$$

よって，

$$Y_{\mathrm{S}}\cdot\frac{2}{A_0}\sin\theta=\sum_{k=1}^{N}2\sin\{\omega t+(k-1)\delta\}\sin\theta$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left[\cos[\{\omega t+(k-1)\delta\}-\theta]-\cos[\{\omega t+(k-1)\delta\}+\theta]\right]$$

ここで，

$2\sin\{\omega t+(k-1)\delta\}\sin\theta=\cos[\{\omega t+(k-1)\delta\}-\theta]-\cos[\{\omega t+(k-1)\delta\}+\theta]$より，

$2\sin(\omega t+k\delta)\sin\theta=\cos\{(\omega t+k\delta)-\theta\}-\cos\{(\omega t+k\delta)+\theta\}$

したがって，$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1$が使えるためには，

$\theta>0$とすると，

$\omega t+(k-1)\delta-\theta<\omega t+(k-1)\delta+\theta$，$\omega t+k\delta-\theta<\omega t+k\delta+\theta$より，

$\{\omega t+(k-1)\delta\}+\theta=(\omega t+k\delta)-\theta$，すなわち$\theta=\frac{\delta}{2}$であればよい。

このとき，$Y_{\mathrm{S}}\cdot\frac{2}{A_0}\sin\theta=\cos(\omega t-\theta)-\cos[\{\omega t+(N-1)\delta\}+\theta]$となるから，

$$Y_{\mathrm{S}}\cdot\frac{2}{A_0}\sin\frac{\delta}{2}=\cos\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right)-\cos\left(\omega t+\frac{2N-1}{2}\delta\right)$$

さらに，$\omega t-\frac{\delta}{2}=a-b$，$\omega t+\frac{2N-1}{2}\delta=a+b$とおけば，

$Y_{\mathrm{S}} \cdot \dfrac{2}{A_0} \sin\dfrac{\delta}{2} = 2\sin a \sin b$（積和の公式），$a = \omega t + \dfrac{N-1}{2}\delta$，$b = \dfrac{N\delta}{2}$ より，

$$Y_{\mathrm{S}} \cdot \frac{2}{A_0} \sin\frac{\delta}{2} = 2\sin\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta\right)\sin\frac{N\delta}{2}$$

よって，

$$Y_{\mathrm{S}} = A_0 \frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}} \sin\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta\right)$$

以上より，

m 次の明線と $m+1$ 次の明線の間の回折光の合成波の式は，

$$Y_{\mathrm{S}} = A_0 \frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}} \sin\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta\right)$$（$0 < \delta < 2\pi$）で与えられ，

初期位相を α とすると，$Y_{\mathrm{S}} = A_0 \dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}} \sin\left(\omega t + \dfrac{N-1}{2}\delta + \alpha\right)$ となる。

これより，$\dfrac{N\delta}{2} = n\pi$ のとき，すなわち $\delta = \dfrac{2n\pi}{N}$ のとき，

$A_{\mathrm{S}} = 0$，すなわち明るさが 0 になることがわかる。

練習問題

次の数列の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta \ \left(0 \le \theta < 2\pi\right)$　**(2)** $\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta \ \left(0 \le \theta < 2\pi\right)$

(1)

（ｉ）$\theta = 0$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = 0$

（ⅱ）$0 < \theta < 2\pi$ のとき

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha \cdot S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin\alpha \cdot \sin k\theta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{\cos(k\theta - \alpha) - \cos(k\theta + \alpha)\} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\{\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha)\} + \cdots \\
&\qquad + \{\cos(k\theta - \alpha) - \cos(k\theta + \alpha)\} + \{\cos((k+1)\theta - \alpha) - \cos((k+1)\theta + \alpha)\} + \cdots \\
&\qquad + \{\cos(n\theta - \alpha) - \cos(n\theta + \alpha)\}\Big]
\end{aligned}
$$

ここで，$k\theta + \alpha = (k+1)\theta - \alpha$ とすると，$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$　・・・①

また，$\sin\alpha \cdot S_n = \dfrac{1}{2}\{\cos(\theta - \alpha) - \cos(n\theta + \alpha)\}$　・・・②

①，②および $0 < \dfrac{\theta}{2} < \pi$ より，$S_n = \dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$

あるいは，$\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\theta = 2\sin\dfrac{n+1}{2}\theta \cdot \sin\dfrac{n}{2}\theta$ より，$S_n = \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta \cdot \sin\dfrac{n}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

（ｉ），（ⅱ）より，$\theta = 0$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = 0$

$0 < \theta < 2\pi$ ののとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta \cdot \sin\dfrac{n}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

(2)

（ｉ） $\theta = 0$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = n$$

（ⅱ） $0 < \theta < 2\pi$ のとき

$T_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta$ とおくと，

$$\sin\beta \cdot T_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta \cdot \sin\beta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \{\sin(k\theta + \beta) - \sin(k\theta - \beta)\}$$

ここで，$k\theta - \beta = (k+1)\theta + \beta$ とすると，$\beta = -\frac{\theta}{2}$　・・・③

また，$\sin\beta \cdot T_n = \frac{1}{2}\{\sin(\theta + \beta) - \sin(n\theta - \beta)\}$　・・・④

③，④および $0 < \frac{\theta}{2} < \pi$ より，

$$T_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \text{ または } T_n = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta \cdot \cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

（ｉ），（ⅱ）より，

$\theta = 0$ のとき，$\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = n$

$0 < \theta < 2\pi$ ののとき，$\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta \cdot \cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$