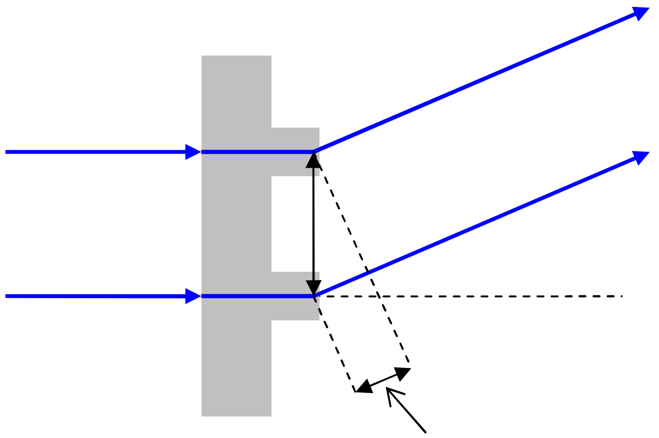
スリット通過光の干渉と光の強度分布

はじめに　合成波の方程式を図形を利用して求める方法

m 次の明線と m+1 次の明線の間の回折光の干渉を例に



m 次の明線と m+1 次の明線の間の回折光

隣り合うスリットからの回折光の光路差は，
m 次の明線ができる場合は $m\lambda$，$(m+1)$ 次の明線ができる場合は $(m+1)\lambda$ だから，
それぞれの位相は $2m\pi$，$2(m+1)\pi$ である。
よって，m 次の明線と $(m+1)$ 次の明線の間の回折光の場合，
隣り合うスリットからの回折光の光路差の位相は，$2m\pi+\delta$ $(0<\delta<2\pi)$ と表わせる。
ゆえに，このときのスリット 1 からの回折光とスリット 1 から数えて k（$k=1,2,3,\cdots$）番目の
スリット（以後『スリット k』）からの回折光の光路差の位相は $2m\pi+(k-1)\delta$ である。
以上から，
スリット 1 からの回折光のスクリーン上の観測点における変位 y_1 を

$y_1=A_0\sin(\omega t+\alpha)$（$A_0$ は振幅，ω は角振動数で単振動の周期を T とすると $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$）とすると，

その位相は $\omega t+\alpha$ だから，スリット k からの回折光の変位 y_k は，
$y_k=A_0\sin\{\omega t+(k-1)\delta+\alpha\}$　となる。
よって，スリット 1 からスリット N までの N 本の回折光の合成波の変位を Y_S とすると，

$$Y_\mathrm{S}=\sum_{k=1}^{N}y_k=A_0\sum_{k=1}^{N}\sin\{\omega t+(k-1)\delta+\alpha\}$$

となる。
しかし，これを計算して Y_S の振幅と位相を求めるのは煩雑（計算方法は後述）である。
そこで，$y_k=A_0\sin\{\omega t+(k-1)\delta+\alpha\}$ をベクトルで視覚化することで，
Y_S の振幅と位相を図形的に求める方法について解説する。

方法の概要

$y_k = A_0 \sin\{\omega t + (k-1)\delta + \alpha\}$を極座標の成分表示ベクトルで表し，

これを継ぎ足していくことより，Y_Sを視覚化する。

手順 1

xy 直交座標平面上に，原点 O を極， x 軸方向を始線，$\omega t + (k-1)\delta + \alpha$ を偏角，

A_0 を動径とする極座標をとる。

すると，$y_k = A_0 \sin\{\omega t + (k-1)\delta + \alpha\}$を表す極座標を A_k とすれば，

原点 O を中心とする半径 A_0 の円周上に点 $\mathrm{A}_k\ (A_0, \omega t + (k-1)\delta + \alpha)$ がとれる。

手順 2

原点 O を定点とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}$ を $\vec{A}_k$ と表すと，$\vec{A}_k = \begin{pmatrix} \omega t + (k-1)\delta + \alpha \\ A_0 \end{pmatrix}$

また，極座標系と xy 直交座標系を重ね合わせれば，

直交座標の y 座標は $y = A_0 \sin\{\omega t + (k-1)\delta + \alpha\}$ となることから，

スリット k からの回折光の観測点における変位 y_k を表していることがわかる。

手順 3

合成波のベクトルを $\vec{A}_\mathrm{S}$ とすると，

$$\vec{A}_\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{N} \vec{A}_k = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \cdots + \vec{A}_k + \cdots + \vec{A}_N$$

ここで，各ベクトルを継ぎ足していけば，

その終点と極 O を結ぶ線分の長さは合成波 Y_S の振幅，

その線分と始線のなす角は合成波 Y_S の位相，

y 座標が Y_S の変位を表す。

この方法は，合成波の振る舞いをアナログ的に理解するにはもってこいである。

補足

位相

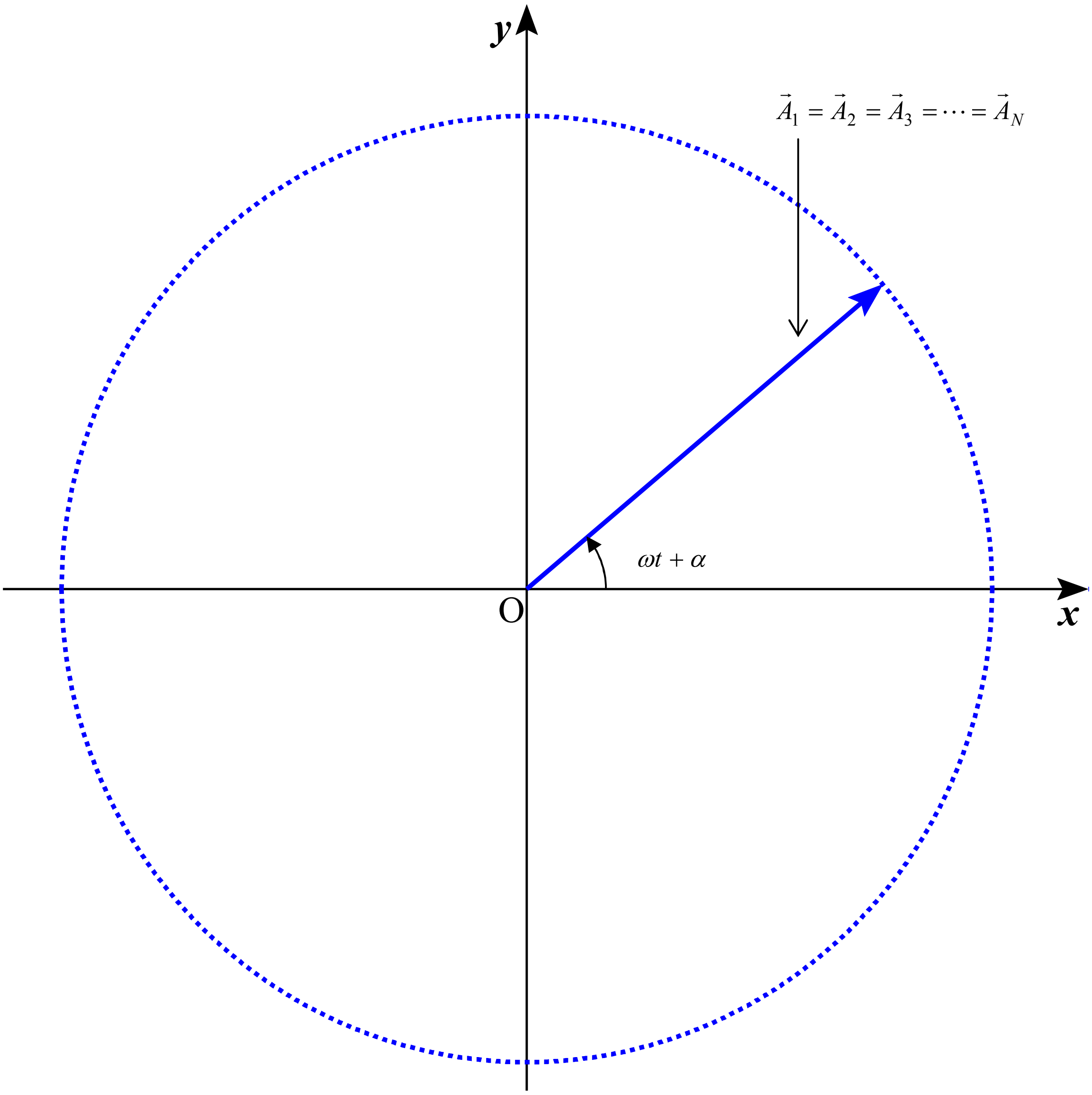
三角関数の方程式 $y = a \sin f(t, x)$ が振動や波動の方程式の場合，

角を表す部分 $f(t,\ x)$ を位相とよぶ。

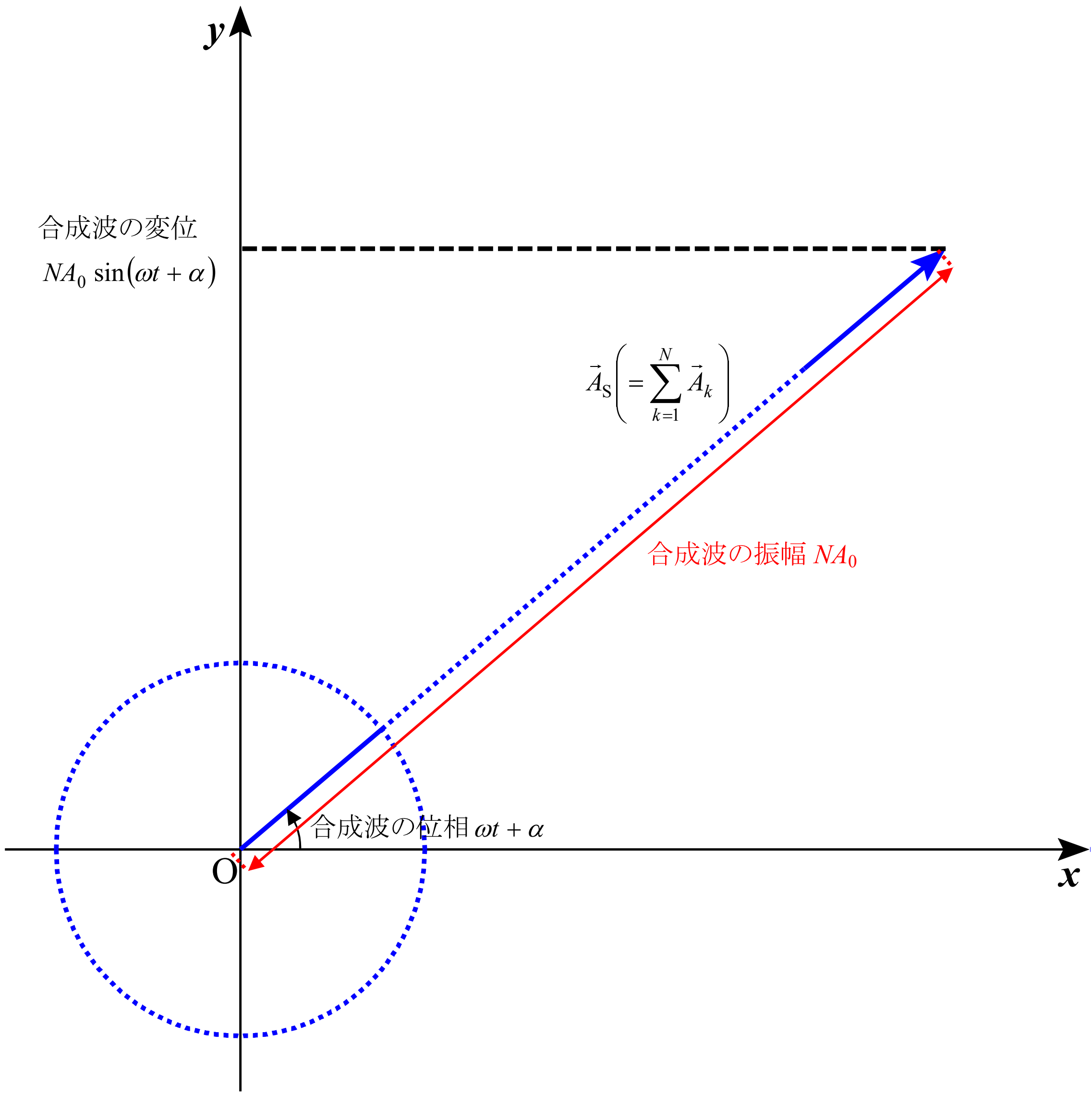
明線ができる場合

$\delta = 0$ より，$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 = \vec{A}_3 = \cdots = \vec{A}_k = \cdots = \vec{A}_N$ となるから，

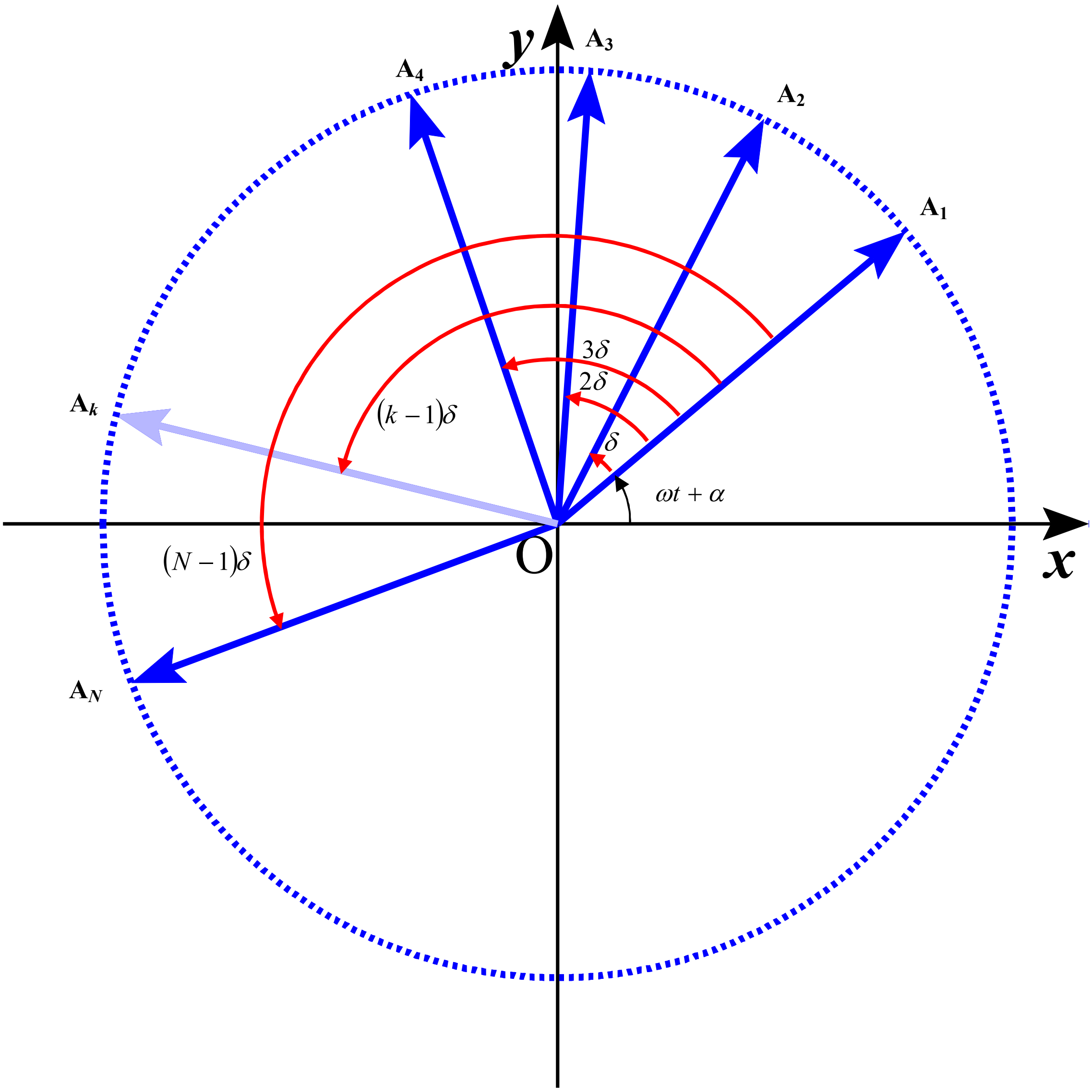
$\left|\vec{A}_{\mathrm{S}}\right| = NA_0$, 位相 $\omega t + \alpha$ より，$Y_{\mathrm{S}} = NA_0 \sin(\omega t + \alpha)$ となる。



これらのベクトルを継ぎ足すと次のようになる。

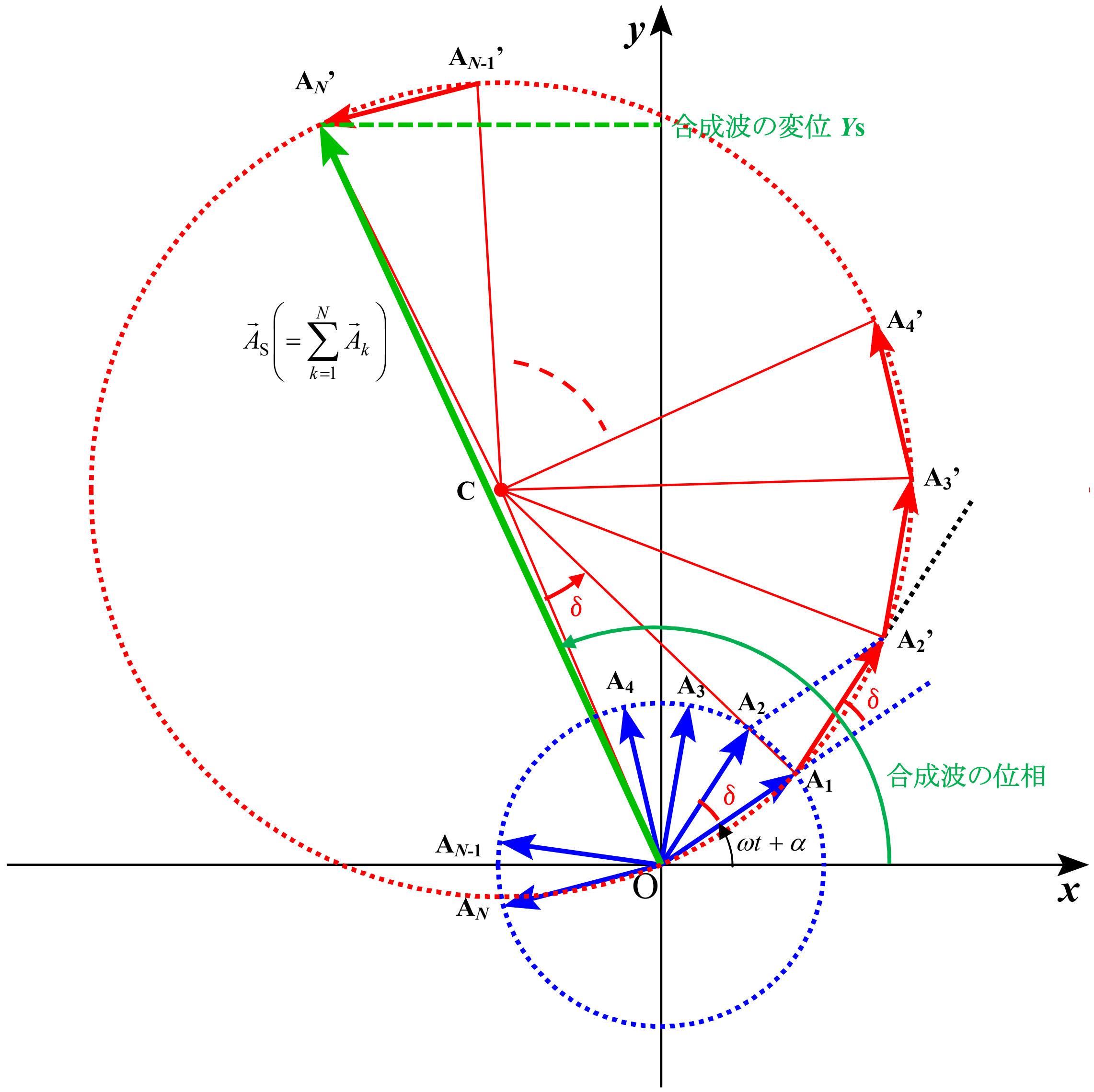


明線ができない場合



これらのベクトルを継ぎ足すと次のようになる。

$\left|\vec{A}_\mathrm{S}\right|$ が合成波の振幅，Y_S は合成波の変位，$\vec{A}_\mathrm{S}$ と始線のなす角が合成波の位相



合成波の位相を求めてみる

円周角と中心角の関係よりから $\angle \mathrm{A}_N{}'\mathrm{OA}_1=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{A}_N{}'\mathrm{CA}_1$

$\angle \mathrm{CA}_1\mathrm{O}$ の外角と $\Delta\mathrm{COA}_1$ の内角の関係より，$\delta+\angle \mathrm{CA}_1\mathrm{A}_2{}'=\angle \mathrm{OCA}_1+\angle \mathrm{COA}_1$ ・・・①

$\Delta\mathrm{COA}_1\equiv\Delta\mathrm{CA}_1\mathrm{A}_2{}'\ (\equiv\Delta\mathrm{CA}_2{}'\mathrm{A}_3{}'\equiv\cdots\equiv\Delta\mathrm{CA}_{N-1}{}'\mathrm{A}_N{}')$ より，$\angle \mathrm{COA}_1=\angle \mathrm{CA}_1\mathrm{A}_2{}'$ ・・・②

①，②より，$\angle \mathrm{OCA}_1=\delta$，$\angle \mathrm{A}_N{}'\mathrm{OA}_1=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{A}_N{}'\mathrm{CA}_1=\dfrac{(N-1)\delta}{2}$

ゆえに，合成波の位相＝$\omega t+\alpha+\dfrac{(N-1)\delta}{2}$

合成波の振幅を求めてみる

COの長さ

$\angle \mathrm{CA_1O}$ の外角と $\Delta \mathrm{COA_1}$ の内角の関係より， $\delta + \angle \mathrm{CA_1A_2}' = \angle \mathrm{OCA_1} + \angle \mathrm{COA_1}$ ・・・①

$\Delta \mathrm{COA_1} \equiv \Delta \mathrm{CA_1A_2}' \left(\equiv \Delta \mathrm{CA_2}'\mathrm{A_3}' \equiv \cdots \equiv \Delta \mathrm{CA}_{N-1}'\mathrm{A}_N'\right)$ より， $\angle \mathrm{COA_1} = \angle \mathrm{CA_1A_2}'$ ・・・②

①，②より， $\delta = \angle \mathrm{OCA_1}$

$\Delta \mathrm{COA_1}$ の頂点 C から底辺 $\mathrm{OA_1}$ に下ろした垂線の足を H とすると，

$\mathrm{CO}\sin\angle \mathrm{OCH} = \mathrm{OH}$ より， $\mathrm{CO} = \dfrac{\mathrm{OH}}{\sin\angle \mathrm{OCH}}$

$\Delta \mathrm{COA_1}$ は $\angle \mathrm{C}$ を頂角とする二等辺三角形だから，

$\angle \mathrm{OCH} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{OCA_1} = \dfrac{\delta}{2}$， $\mathrm{OH} = \dfrac{\mathrm{OA_1}}{2} = \dfrac{A_0}{2}$

よって， $\mathrm{CO} = \dfrac{A_0}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}$ ・・・③

OA_N' の長さ

$\Delta \mathrm{CA}_N'\mathrm{O}$ について

$0 < N\delta < 2\pi$ とすると，

$\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO} = N\delta \ (0 < N\delta < \pi)$ または $\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO} = 2\pi - N\delta \ (\pi < N\delta < 2\pi)$ ・・・④

頂点 C から底辺 OA_N' に下ろした垂線の足を M とすると， $\mathrm{OM} = \mathrm{CO}\sin\angle \mathrm{OCM}$

$\Delta \mathrm{CA}_N'\mathrm{O}$ は $\angle \mathrm{C}$ を頂角とする二等辺三角形であるから，

二等辺三角形の性質より， $\angle \mathrm{OCM} = \dfrac{\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO}}{2}$， $\mathrm{OA}_N' = 2\mathrm{OM}$

よって， $\mathrm{OA}_N' = 2\mathrm{CO}\sin\dfrac{\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO}}{2}$

④をこれに代入すると， $\angle \mathrm{A}_N'\mathrm{CO}$ が $N\delta$ と $2\pi - N\delta$ のいずれの場合においても

$\mathrm{OA}_N' = 2\mathrm{CO}\sin\dfrac{N\delta}{2}$

これと③より， $\mathrm{OA}_N' = 2\cdot\dfrac{A_0}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}\sin\dfrac{N\delta}{2} = A_0\cdot\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$

また， $N\delta = 2\pi$ のとき， A_N' は O と一致するから， $\mathrm{OA}_N' = 0$

これは上式を満たす。

ゆえに， $\mathrm{OA}_N' = A_0\cdot\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}} \ (0 < N\delta \le 2\pi)$

合成波の振幅

$\mathrm{OA}_N{}'$を一般化すると，$\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = A_0\left|\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\right|$ （$N\delta$は任意の実数，$\delta \neq 0$）

また，

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = A_0\lim_{\delta\to 0}\left|\frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\right| = A_0\lim_{\delta\to 0}\left|\frac{\dfrac{\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\dfrac{N\delta}{2}}\cdot N\right| = NA_0$$ および $\delta = 0$ のとき $\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = NA_0$

より，

$\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right|$は$\delta = 0$において連続である。

合成波の式を求めてみる

以上より，

m次の明線と$m+1$次の明線の間の回折光の合成波の式は，

$$Y_\mathrm{S} = A_0\frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\sin\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\delta + \alpha\right)$$

振幅：$\left|\overrightarrow{A_\mathrm{S}}\right| = A_0\left|\dfrac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\right|$，位相：$\omega t + \dfrac{N-1}{2}\delta + \alpha$

また，これより，

$\dfrac{N\delta}{2} = n\pi$のとき，すなわち$\delta = \dfrac{2n\pi}{N}$のとき，

振幅が0になることが，すなわちスクリーン上に暗線ができることがわかる。

多重スリット通過光の光路差と干渉による光強度

合成波の振幅は$\delta = 0$のとき最大であり，これを$A_{\max}$とすると$A_{\max} = NA_0 \quad \therefore A_0 = \dfrac{A_{\max}}{N}$

これと$\left|\overrightarrow{A_S}\right| = A_0 \left| \dfrac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right|$より，$\left|\overrightarrow{A_S}\right| = \dfrac{A_{\max}}{N} \left| \dfrac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right| = A_{\max} \left| \dfrac{\sin \frac{N\delta}{2}}{N \sin \frac{\delta}{2}} \right|$

光の強度は振幅の 2 乗に比例するから，

振幅が$\left|\overrightarrow{A_S}\right|$のときの光の強度を$I_S$，振幅が$A_{\max}$のときの光の強度を$I_{\max}$とすると，

$$I_S = \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{N \sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 I_{\max}$$

スリット間隔をd，回折角をθとすると，隣り合うスリットからの光線の光路差は$d \sin\theta$

光路差の位相の一般形は$2m\pi + \delta$であるが，三角関数では，これをδとしてよいから，

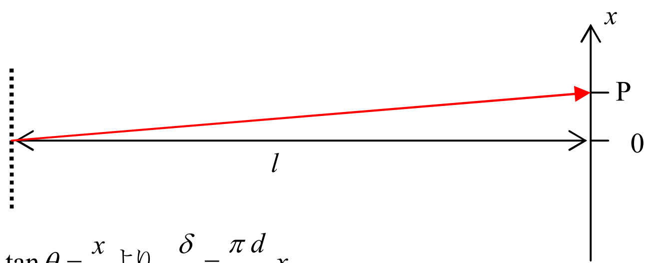
$\delta : d\sin\theta = 2\pi : \lambda$より，$\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{\pi\, d \sin\theta}{\lambda}$

よって，

スリット通過光（スリット間隔d，スリット数N）の干渉による明るさの相対強度は，

回折角をθとすると，$\dfrac{I_S}{I_{\max}} = \left\{ \dfrac{\sin\left(\frac{N\pi}{\lambda} d\sin\theta\right)}{N\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta\right)} \right\}^2$と表せる。

ちなみに，スリットとスクリーンの間の距離をl，スクリーン上の点 P の座標をx（$l >> x$）とすると，



$\sin\theta \approx \tan\theta = \dfrac{x}{l}$より，$\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{\pi d}{\lambda l} x$

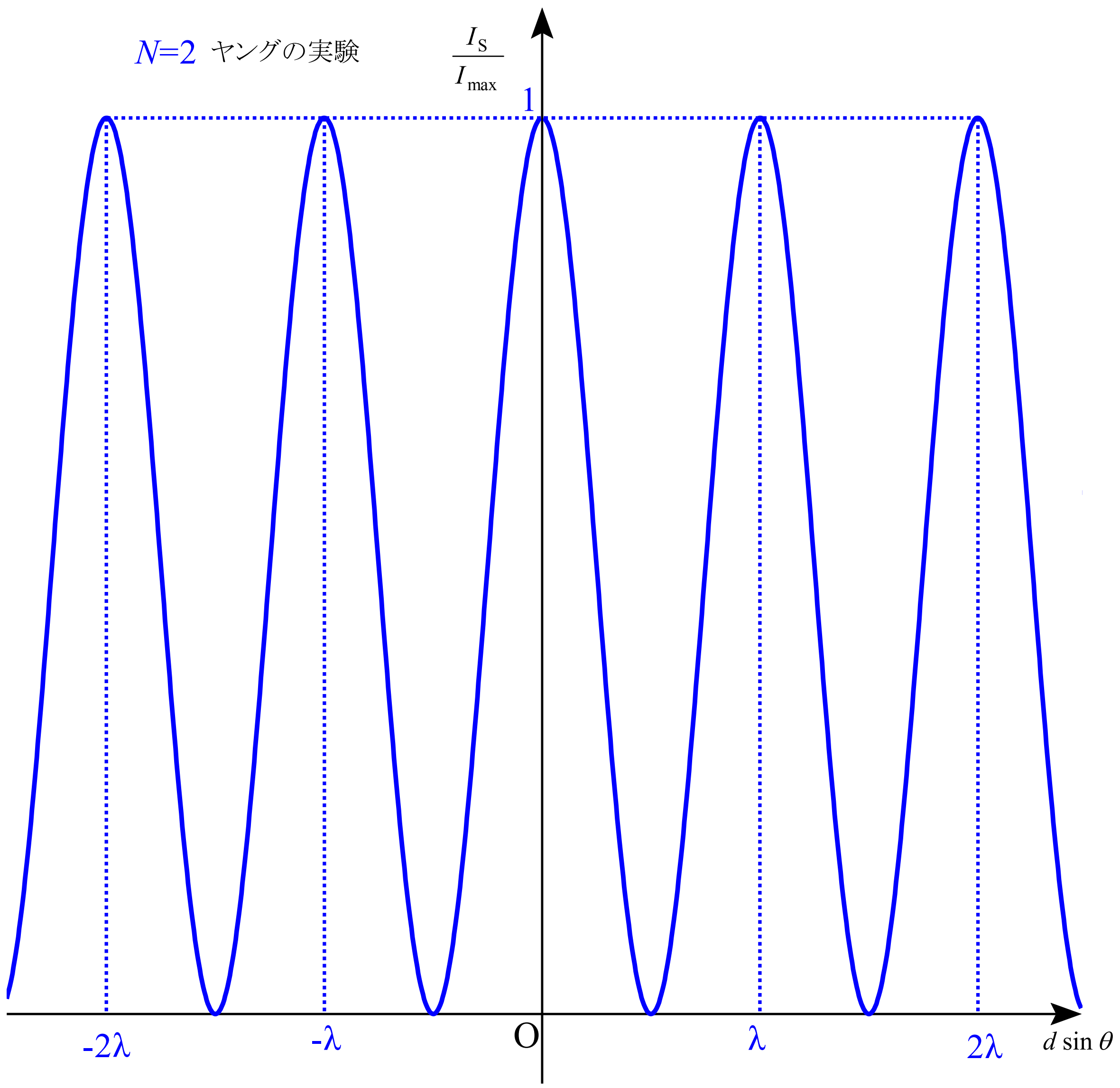
これより，スクリーン上の座標と光の強度分布の関係式は$\dfrac{I_S}{I_{\max}} = \left(\dfrac{\sin \frac{N\pi d}{l\lambda} x}{N \sin \frac{\pi d}{l\lambda} x} \right)^2$

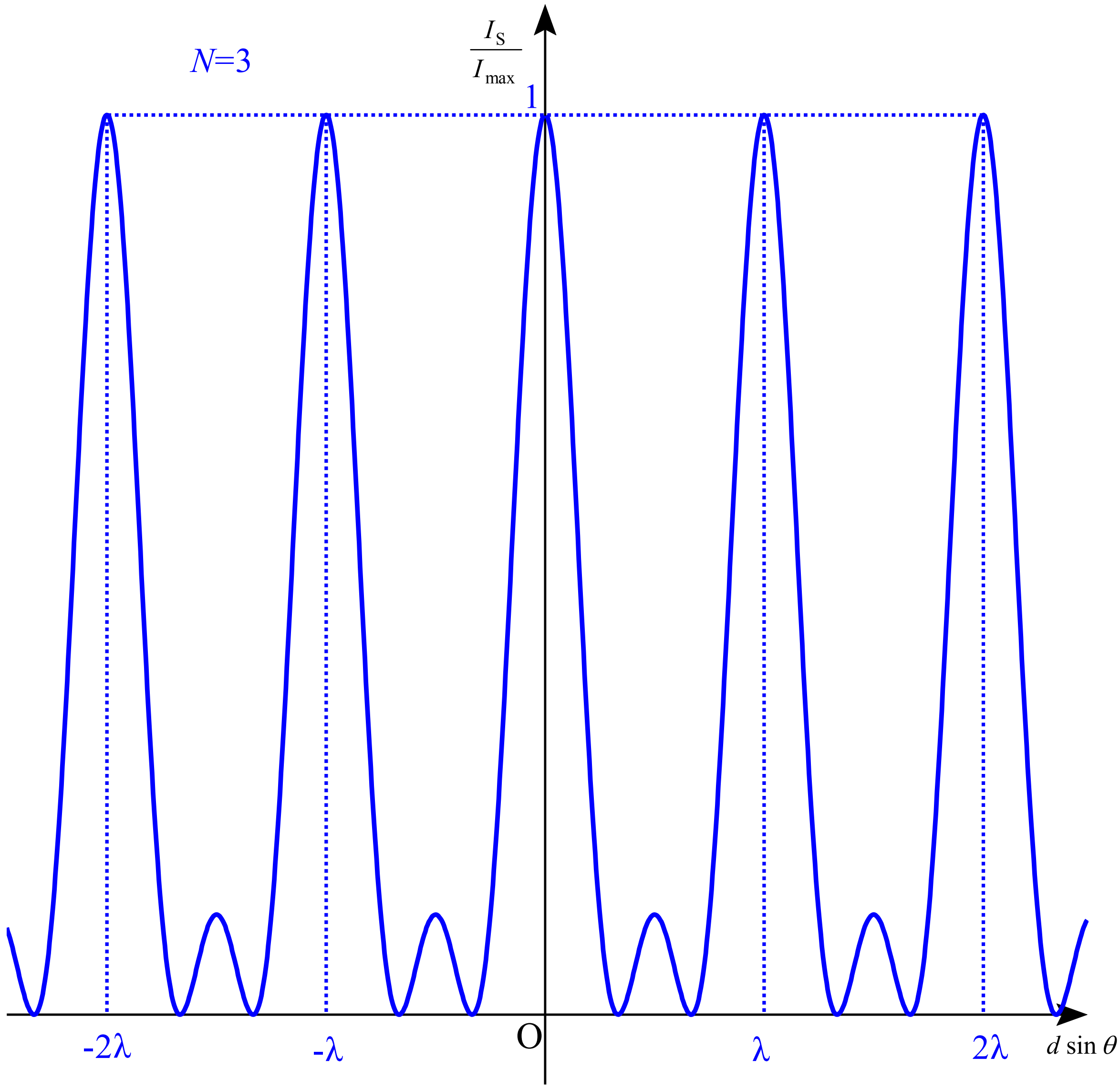
光の強度分布 $\dfrac{I_{\mathrm{S}}}{I_{\max}}=\left\{\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)}{N\sin\left(\dfrac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)}\right\}^2$ を

横軸を隣り合うスリットからの光線の光路差 $d\sin\theta$，

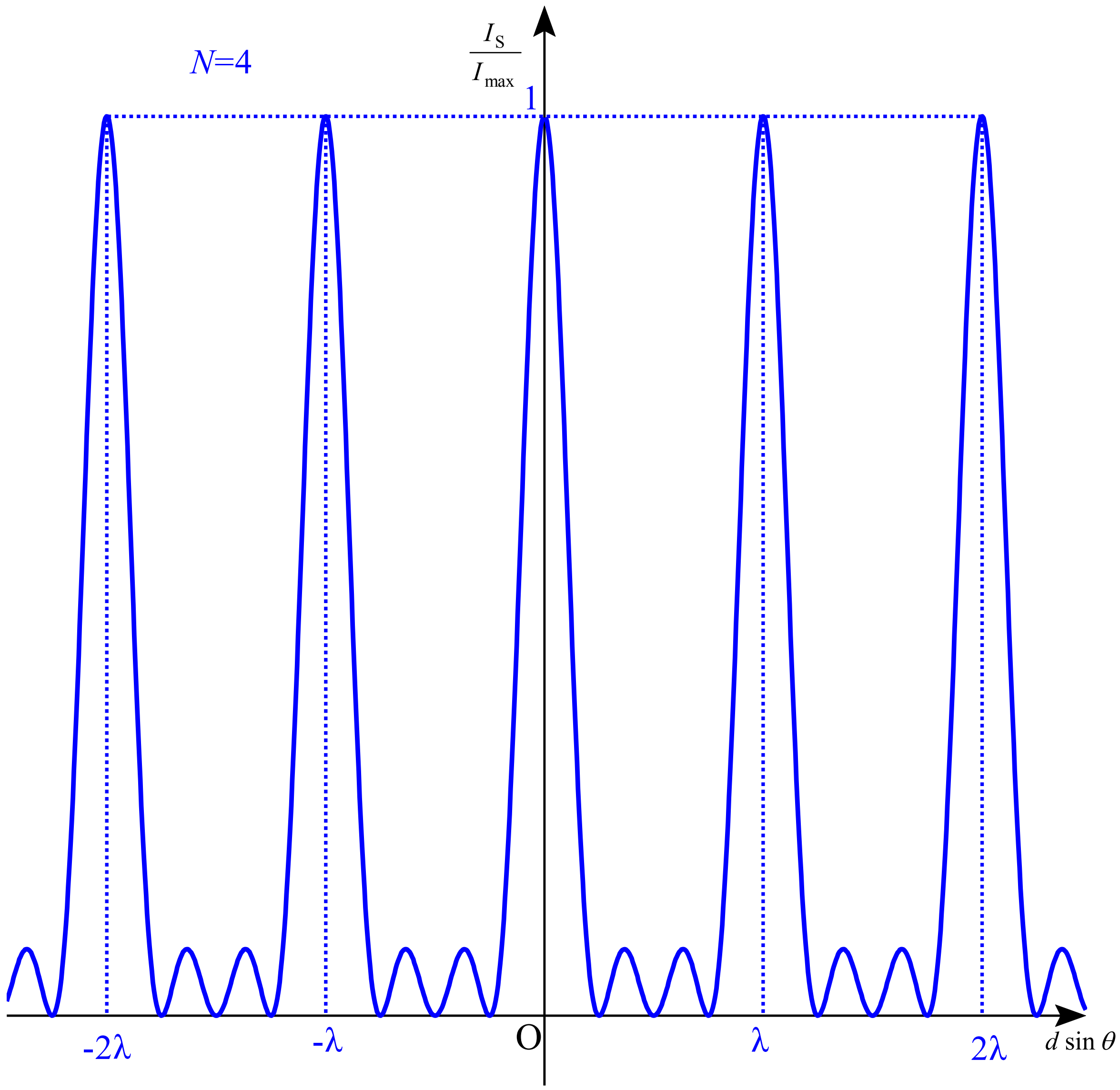
縦軸を通過光の干渉による相対強度 $\dfrac{I_{\mathrm{S}}}{I_{\max}}$ とし，

グラフを描くと，N が大きいほど明線がシャープになることがわかる。

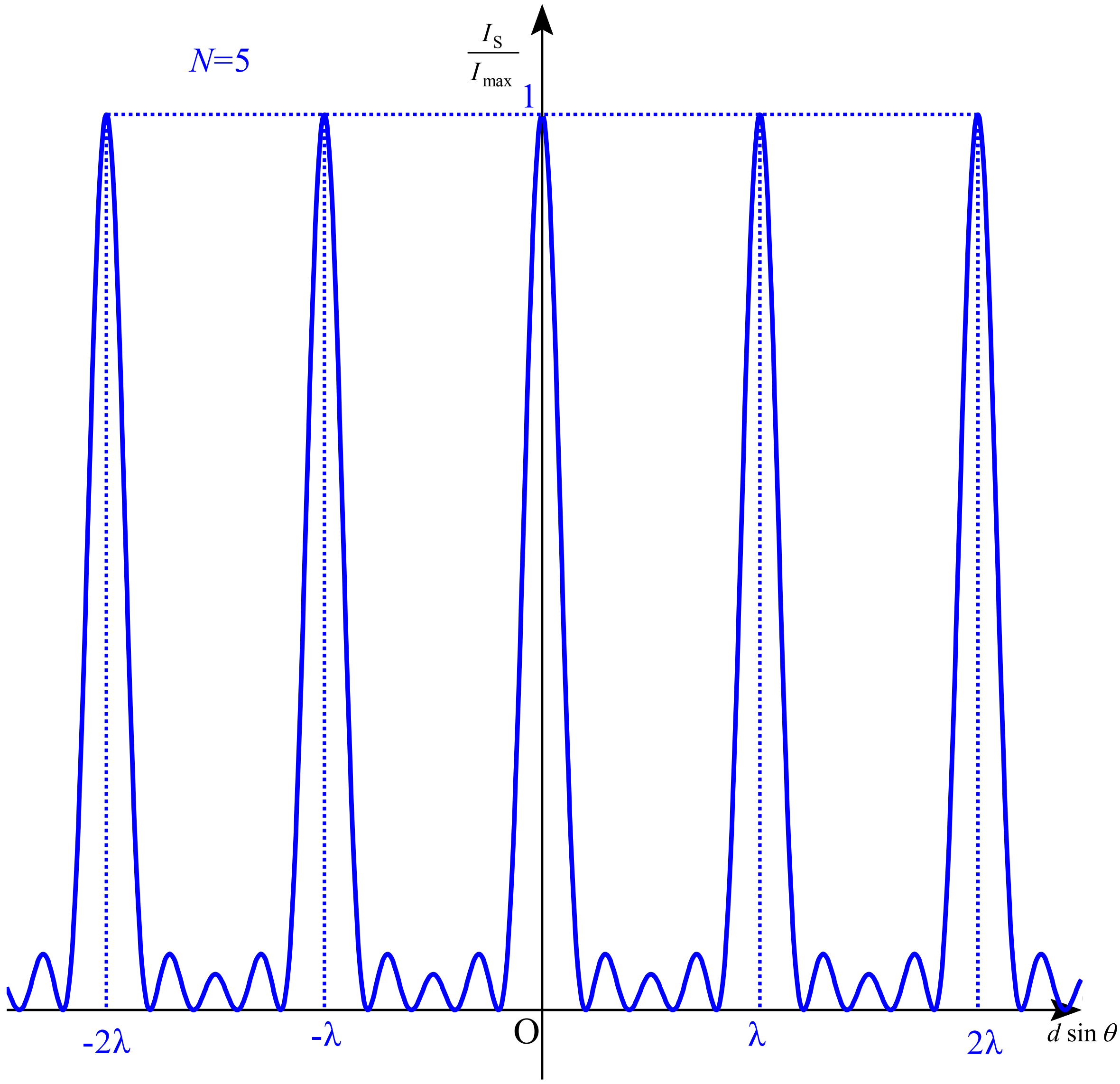


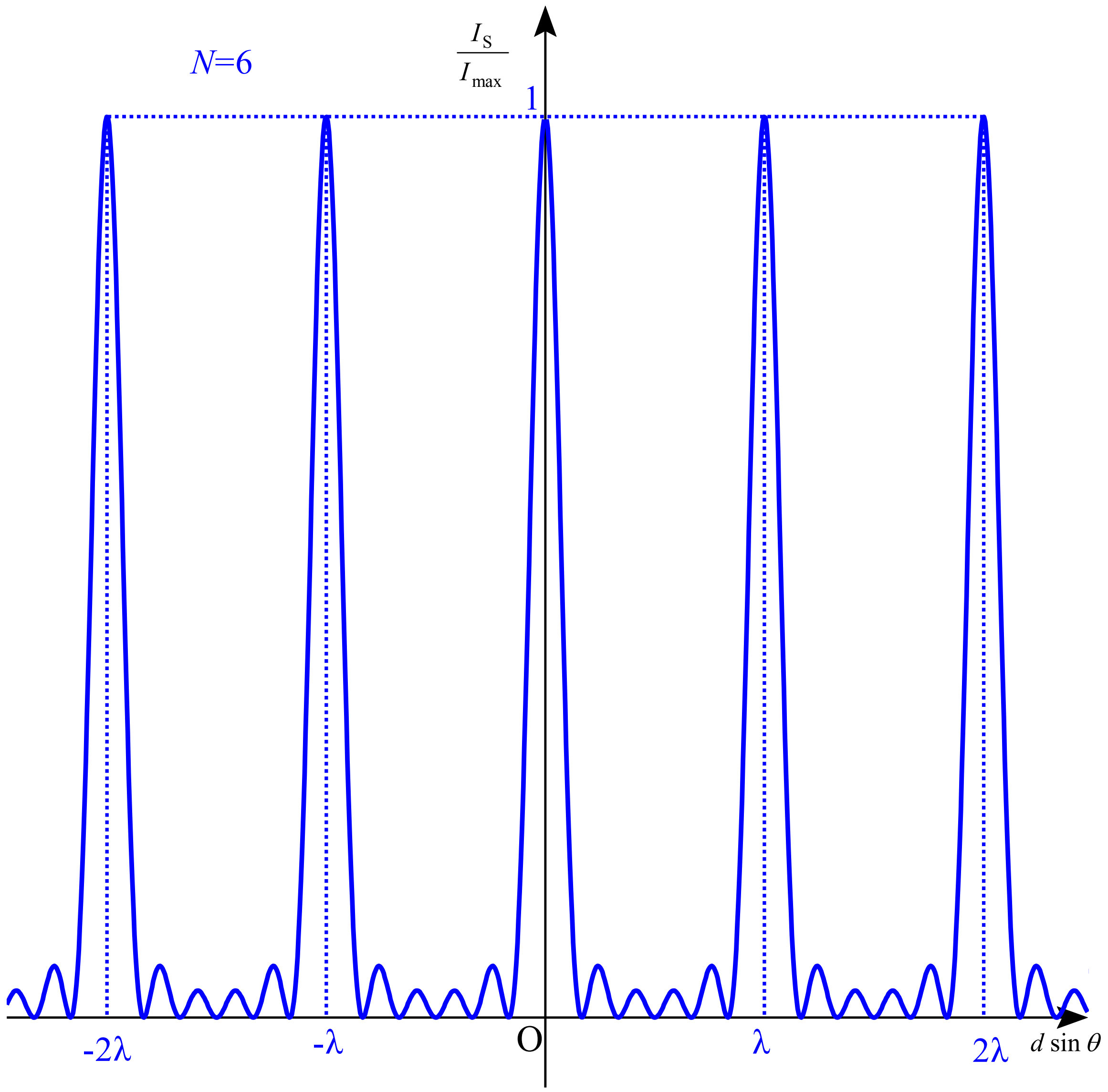


N=3
$\frac{I_S}{I_{max}}$
1
O
-2λ
-λ
λ
2λ
$d \sin \theta$

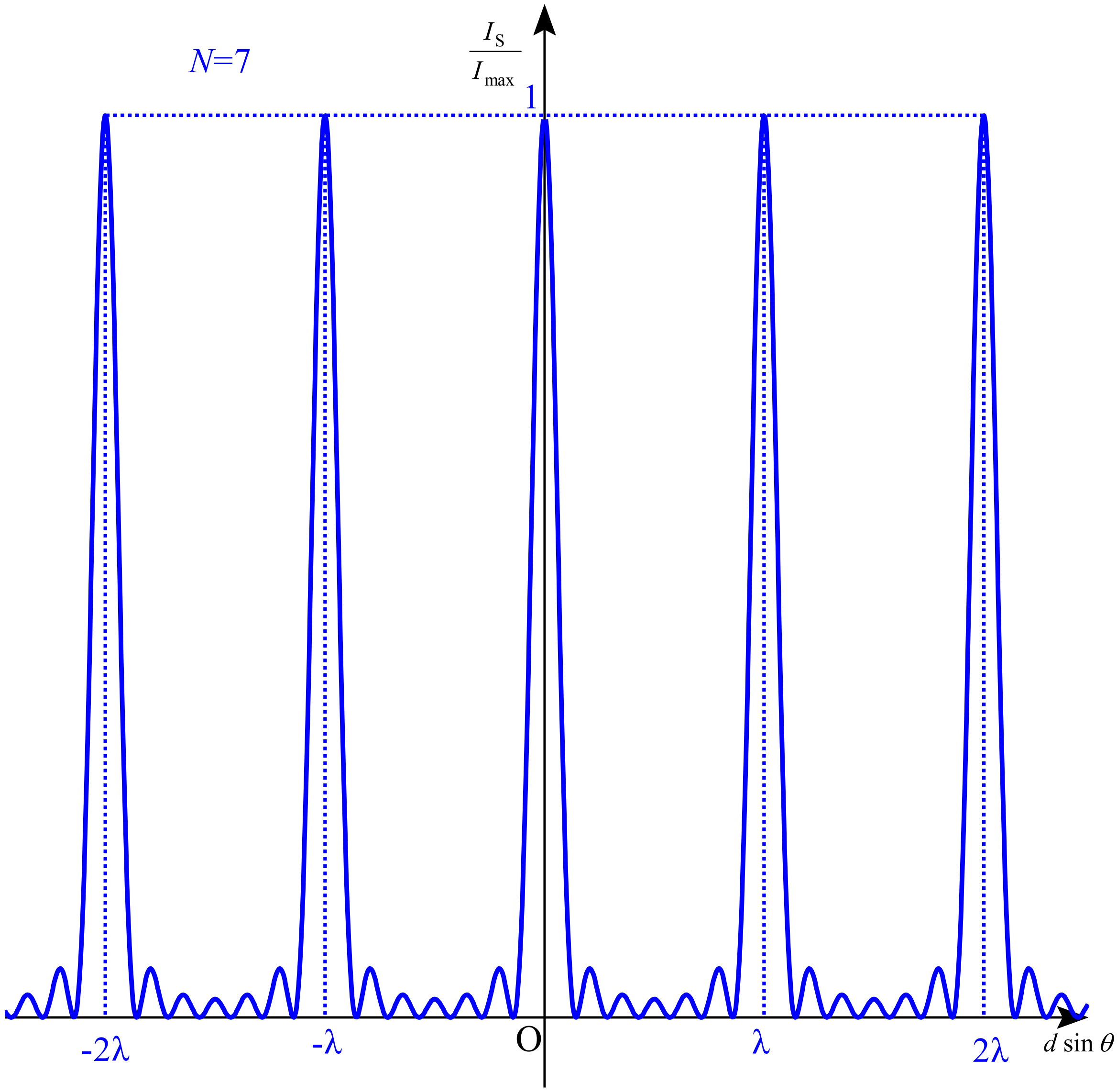


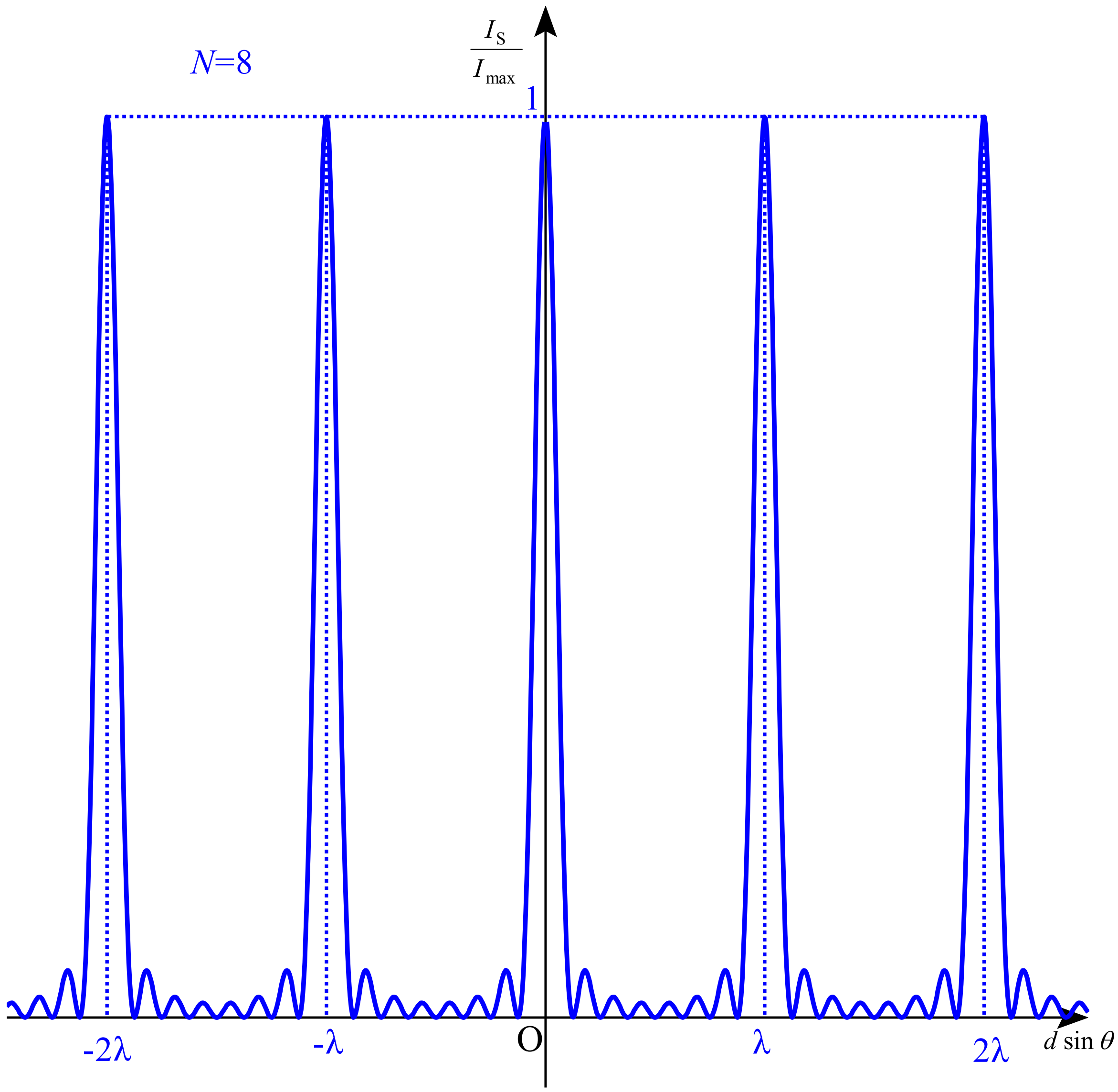
N=4
I_S / I_max
1
-2λ
-λ
O
λ
2λ
d sin θ

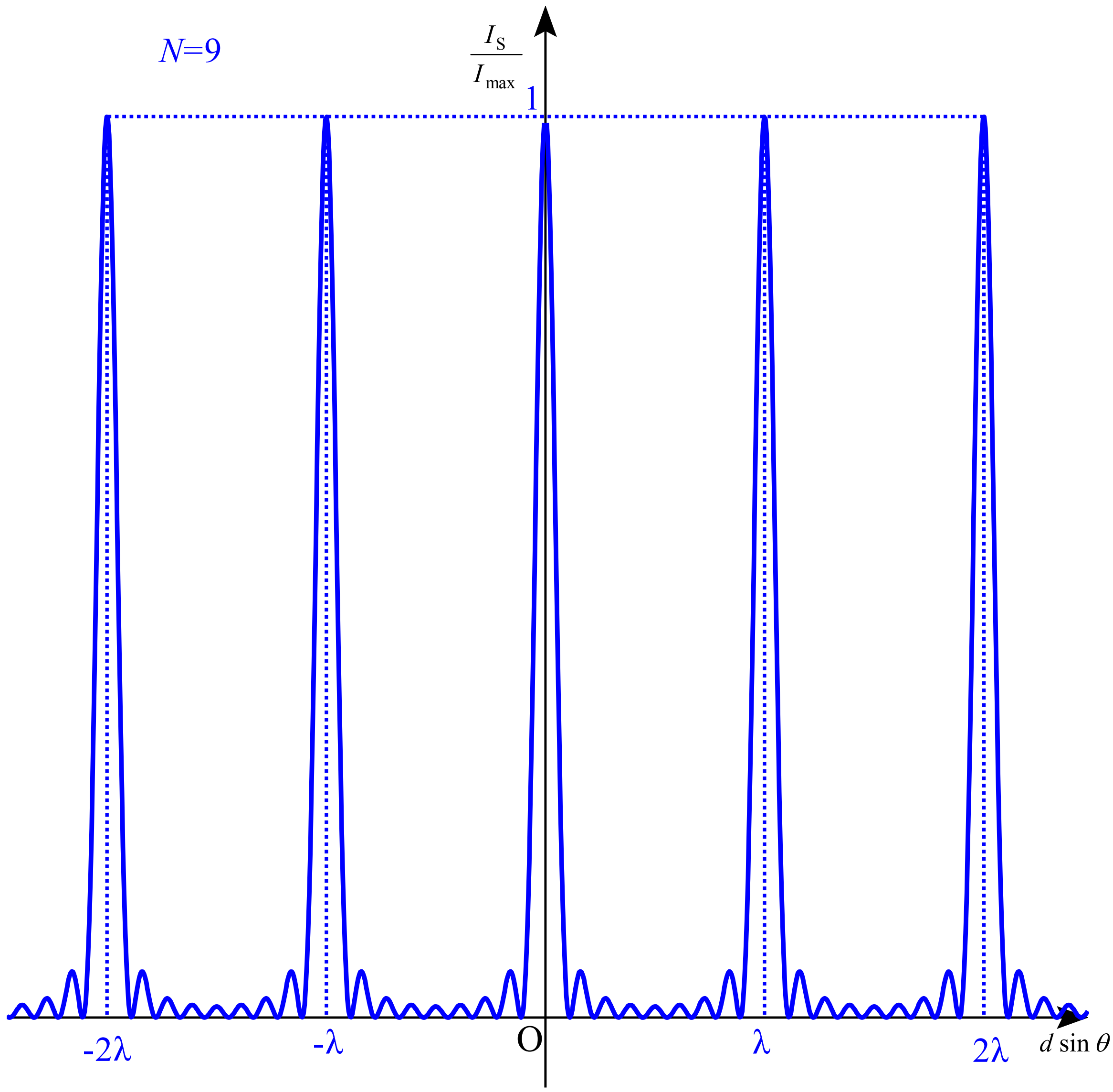

N=5
$\frac{I_S}{I_{max}}$
1
-2λ
-λ
O
λ
2λ
$d \sin\theta$

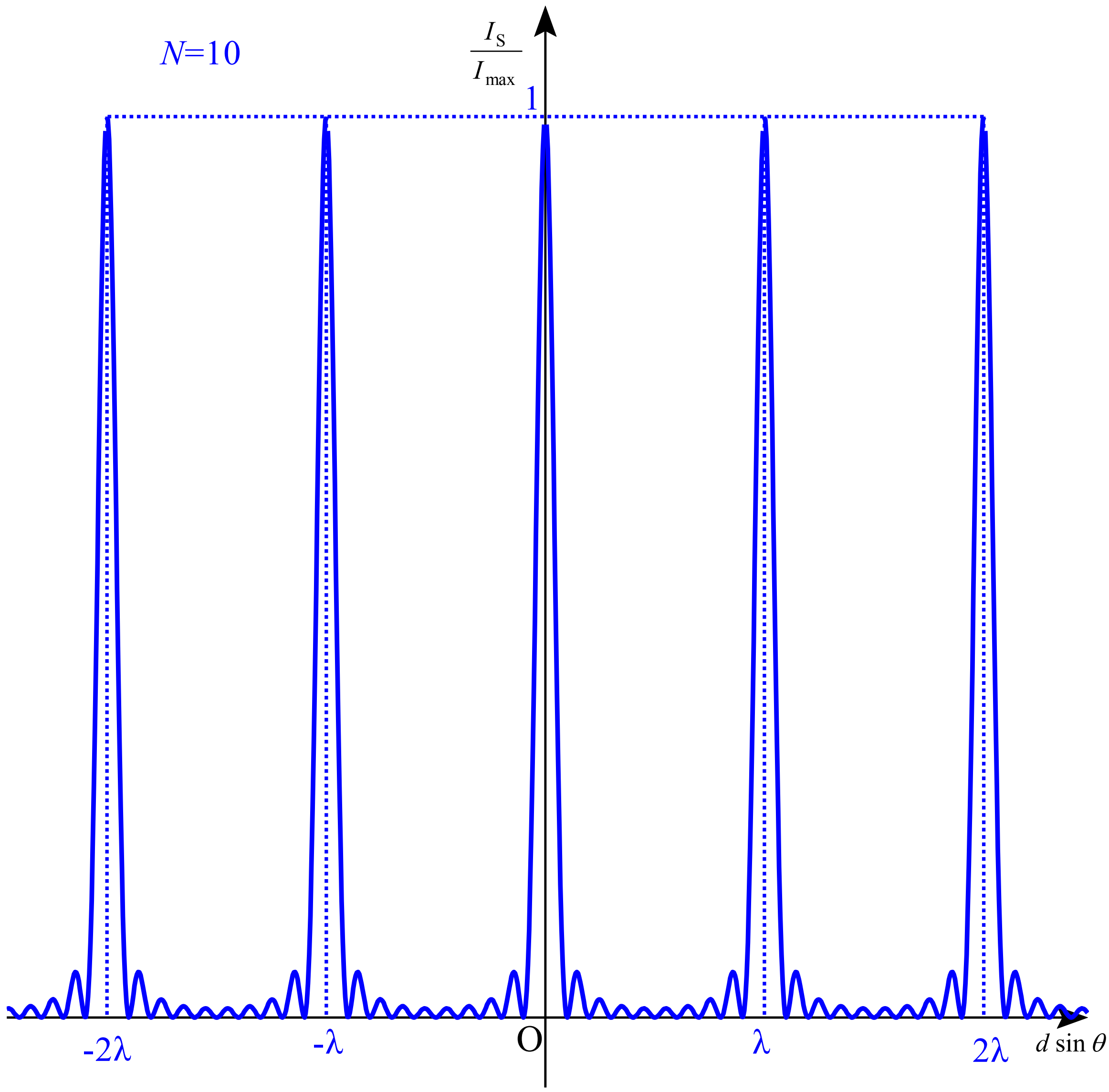


N=6
$\frac{I_S}{I_{max}}$
1
-2λ
-λ
O
λ
2λ
$d \sin \theta$


N=7
$\frac{I_S}{I_{max}}$
1
-2λ
-λ
O
λ
2λ
$d \sin \theta$


$\frac{I_S}{I_{max}}$
N=8
1
-2λ
-λ
O
λ
2λ
$d \sin\theta$


N=9
$\frac{I_S}{I_{max}}$
1
-2λ
-λ
O
λ
2λ
d sin θ


N=10
$\frac{I_S}{I_{max}}$
1
-2λ
-λ
O
λ
2λ
d sin θ

単スリット通過光の干渉による強度分布

スリット幅 D の単スリットを間隔 d で光線が N 本通過すると仮定すると,

d は十分小さいので,$D=Nd$ ・・・① としても問題ない。

また,光の強度分布の式は,回折角を θ とすると,多重スリットの場合と同様に,

$\dfrac{I_S}{I_{max}}=\left\{\dfrac{\sin\left(\dfrac{N\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)}{N\sin\left(\dfrac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)}\right\}^2$ と表せ,これと①より,$\dfrac{I_S}{I_{max}}=\left\{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}\right\}^2$ となる。

しかし,

多重スリット通過光のように「通過光の間隔＝スリット間隔」という下限がないので,

通過光の光線間隔 d は無限に小さい,すなわち N は無限に大きい。

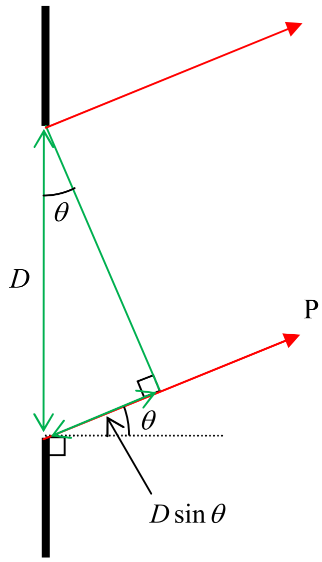
したがって,単スリットは無限多重スリットに例えることができ,

その通過光の干渉による強度分布は $d\to 0$ のときの $\dfrac{I_S}{I_{max}}$ に従う。

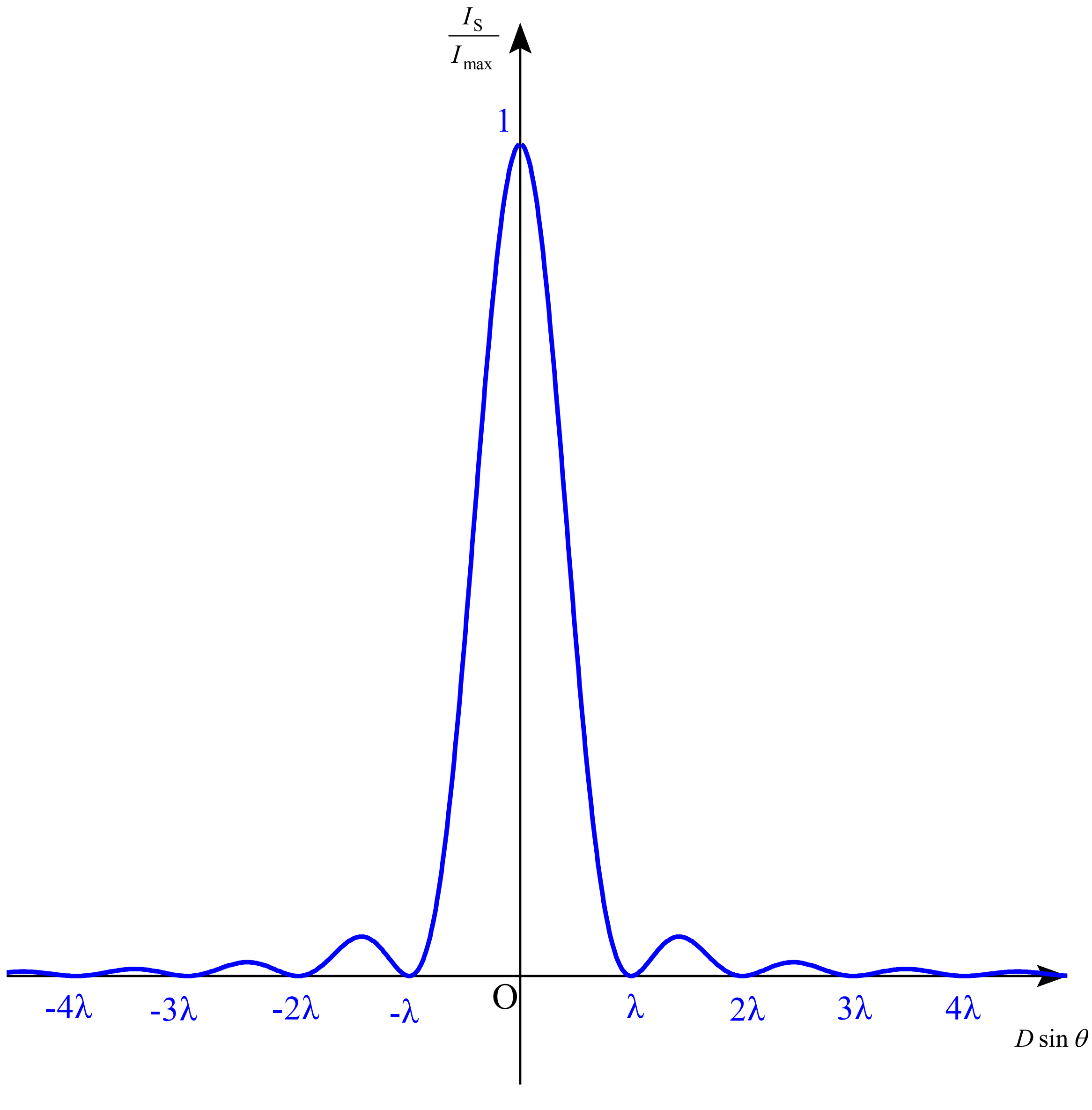
よって,

$$
\begin{aligned}
\frac{I_S}{I_{max}}&=\lim_{d\to 0}\left\{\frac{\sin\left(\dfrac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{N\sin\left(\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}\right\}^2\\
&=\lim_{d\to 0}\left\{\frac{1}{N}\cdot\frac{\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}{\sin\left(\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}\cdot\frac{1}{\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}\cdot\sin\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)\right\}^2\\
&=\lim_{d\to 0}\left\{\frac{\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}{\sin\left(\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}\cdot\frac{1}{\dfrac{\pi Nd\sin\theta}{\lambda}}\cdot\sin\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)\right\}^2\\
&=\lim_{d\to 0}\left\{\frac{\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}{\sin\left(\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)}\cdot\frac{1}{\dfrac{\pi D\sin\theta}{\lambda}}\cdot\sin\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)\right\}^2\\
&=\left\{1\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{\dfrac{\pi D\sin\theta}{\lambda}}\right\}^2
\end{aligned}
$$

ゆえに，$\dfrac{I_S}{I_{\max}}=\left\{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{\dfrac{\pi D\sin\theta}{\lambda}}\right\}^2$



$\dfrac{I_S}{I_{\max}}$ と $D\sin\theta$ の関係のグラフを次のページに示す。

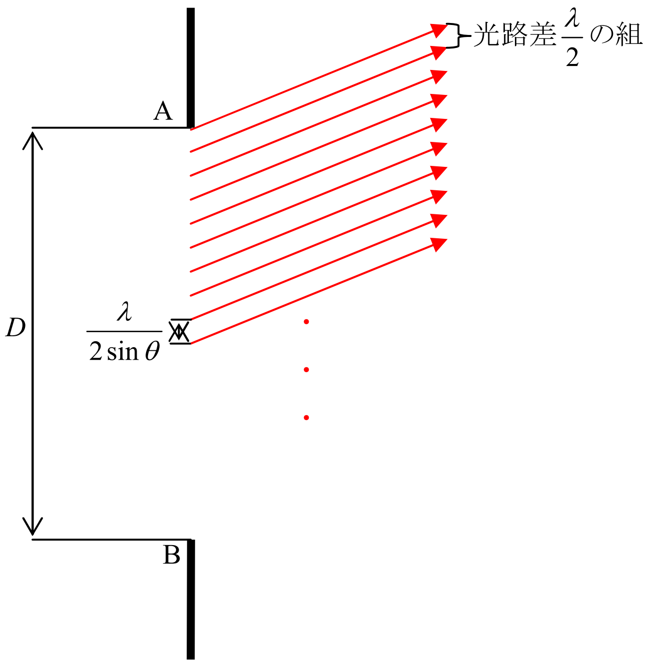

$\frac{I_S}{I_{max}}$
1
O
-4λ
-3λ
-2λ
-λ
λ
2λ
3λ
4λ
$D\sin\theta$

光路差が $n\lambda$（n は 0 でない整数)のとき，暗線ができるのがグラフからわかる。
その理由は，

下図のように，A の通過光から順に B にかけて光路差＝$\dfrac{\lambda}{2}$ の通過光を拾い上げていくと，

光路差 $\dfrac{\lambda}{2}$ の通過光は互いにその光強度を打ち消し合うから，

光路差 $\dfrac{\lambda}{2}$ の関係の組が整数組できるとき，これらの通過光の干渉による光強度は 0 になる。



光路差が $\dfrac{\lambda}{2}$ となる通過光の間隔を d とすると，$d\sin\theta=\dfrac{\lambda}{2}$ より，$d=\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$ だから，

このとき，次ページ図のように

$x_n\left(0<x_n<\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}\right)$ の通過光と $x_n+\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$ の通過光も打ち消し合いの関係になるので，

x_n から B にかけて間隔 $\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$ ごとに拾い上げた通過光の干渉による光強度も 0 になる。

よって，$0\le x<\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$ の通過光と $\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}\le x<\dfrac{2\lambda}{2\sin\theta}$ の通過光がすべて打ち消し合い，

任意の x_n の通過光から始めても，AB 間で打ち消し合いの関係の組の数が整数できる。
ゆえに，AB 間のすべての通過光が打ち消し合う結果，スクリーン上に暗線ができる。

以上を整理すると，

AB 間（間隔 D）を A から順に $\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$ の区間に分けていったとき，

その区間の数が

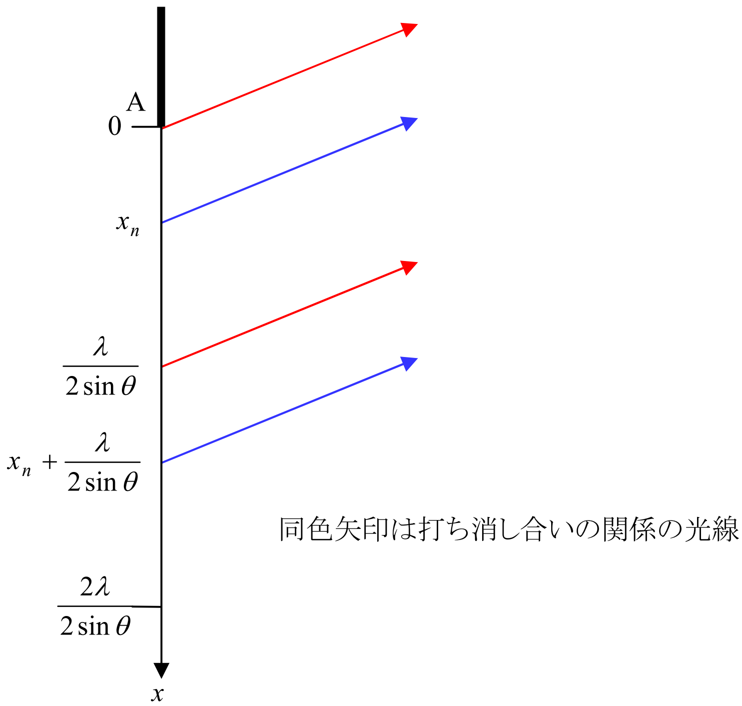
偶数ならば打ち消し合いの区間の組が整数できるので，スクリーン上に暗線ができる。

奇数ならば打ち消されない区間がまるまる 1 つ残るので，スクリーン上に明線ができる。

つまり，

暗線条件は $D=\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}\times 2n$，すなわち $D\sin\theta=n\lambda$

明線条件は $D=\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}\times(2n+1)$，すなわち $D\sin\theta=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$



補足

$\boldsymbol{Y_{\mathrm{S}} = A_0 \sum_{k=1}^{N} \sin\{\omega t + (k-1)\delta + \alpha\}}$ から合成波 $\boldsymbol{Y_{\mathrm{S}}}$ の振幅と位相を求める。

初期位相を $\alpha = 0$ としても合成波の振幅は変わらないから，

簡単のため $\alpha = 0$ の場合で考える。

数学（数列）で分数形の数列の和を部分分数分解を利用して解くことを学んだ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

この方法を一般化すると，$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$ であり，

三角関数の場合，積形の三角関数を，積和の公式を使って，和の形に変形できるから，

この方法を利用することができる。

まず $Y_{\mathrm{S}} = A_0 \sum_{k=1}^{N} \sin\{\omega t + (k-1)\delta\}$ の両辺に $\frac{2}{A_0}\sin\theta$ をかけ，右辺の三角関数を積形にする。

$$Y_{\mathrm{S}} \cdot \frac{2}{A_0}\sin\theta = A_0 \sum_{k=1}^{N} \sin\{\omega t + (k-1)\delta\} \times \frac{2}{A_0}\sin\theta$$

よって，

$$\begin{aligned} Y_{\mathrm{S}} \cdot \frac{2}{A_0}\sin\theta &= \sum_{k=1}^{N} 2\sin\{\omega t + (k-1)\delta\}\sin\theta \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left[\cos[\{\omega t + (k-1)\delta\} - \theta] - \cos[\{\omega t + (k-1)\delta\} + \theta]\right] \end{aligned}$$

ここで，

$2\sin\{\omega t + (k-1)\delta\}\sin\theta = \cos[\{\omega t + (k-1)\delta\} - \theta] - \cos[\{\omega t + (k-1)\delta\} + \theta]$ より，

$2\sin(\omega t + k\delta)\sin\theta = \cos\{(\omega t + k\delta) - \theta\} - \cos\{(\omega t + k\delta) + \theta\}$

したがって，$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1$ が使えるためには，

$\theta > 0$ とすると，

$\omega t + (k-1)\delta - \theta < \omega t + (k-1)\delta + \theta$，$\omega t + k\delta - \theta < \omega t + k\delta + \theta$ より，

$\{\omega t + (k-1)\delta\} + \theta = (\omega t + k\delta) - \theta$，すなわち $\theta = \frac{\delta}{2}$ であればよい。

このとき，$Y_{\mathrm{S}} \cdot \frac{2}{A_0}\sin\theta = \cos(\omega t - \theta) - \cos[\{\omega t + (N-1)\delta\} + \theta]$ となるから，

$$Y_{\mathrm{S}} \cdot \frac{2}{A_0}\sin\frac{\delta}{2} = \cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{2N-1}{2}\delta\right)$$

さらに，$\omega t - \frac{\delta}{2} = a - b$，$\omega t + \frac{2N-1}{2}\delta = a + b$ とおけば，

$Y_{\mathrm{S}}\cdot\dfrac{2}{A_0}\sin\dfrac{\delta}{2}=2\sin a\sin b$（積和の公式），$a=\omega t+\dfrac{N-1}{2}\delta$，$b=\dfrac{N\delta}{2}$ より，

$$Y_{\mathrm{S}}\cdot\frac{2}{A_0}\sin\frac{\delta}{2}=2\sin\left(\omega t+\frac{N-1}{2}\delta\right)\sin\frac{N\delta}{2}$$

よって，

$$Y_{\mathrm{S}}=A_0\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\sin\left(\omega t+\frac{N-1}{2}\delta\right)$$

以上より，

m 次の明線と $m+1$ 次の明線の間の回折光の合成波の式は，

$$Y_{\mathrm{S}}=A_0\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\sin\left(\omega t+\frac{N-1}{2}\delta\right)$$（$0<\delta<2\pi$）で与えられ，

初期位相を α とすると，$Y_{\mathrm{S}}=A_0\dfrac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\sin\left(\omega t+\dfrac{N-1}{2}\delta+\alpha\right)$ となる。

また，振幅を A_{S} とすると，$A_{\mathrm{S}}=A_0\left|\dfrac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right|$

これより，$\dfrac{N\delta}{2}=n\pi$ のとき，すなわち $\delta=\dfrac{2n\pi}{N}$ のとき，

$A_{\mathrm{S}}=0$，すなわち明るさが 0 になることがわかる。

練習問題

次の数列の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta \ \left(0 \le \theta < 2\pi\right)$ **(2)** $\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta \ \left(0 \le \theta < 2\pi\right)$

(1)

（ｉ） $\theta = 0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = 0$

（ⅱ） $0 < \theta < 2\pi$ のとき

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha \cdot S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin\alpha \cdot \sin k\theta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \{\cos(k\theta - \alpha) - \cos(k\theta + \alpha)\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\{\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha)\} + \cdots\right. \\
&\quad + \{\cos(k\theta - \alpha) - \cos(k\theta + \alpha)\} + \{\cos((k+1)\theta - \alpha) - \cos((k+1)\theta + \alpha)\} + \cdots \\
&\quad \left. + \{\cos(n\theta - \alpha) - \cos(n\theta + \alpha)\}\right]
\end{aligned}
$$

ここで，$k\theta + \alpha = (k+1)\theta - \alpha$ とすると，$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ ・・・①

また，$\sin\alpha \cdot S_n = \dfrac{1}{2}\{\cos(\theta - \alpha) - \cos(n\theta + \alpha)\}$ ・・・②

①，②および $0 < \dfrac{\theta}{2} < \pi$ より，$S_n = \dfrac{\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$

あるいは，$\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\theta = 2\sin\dfrac{n+1}{2}\theta \cdot \sin\dfrac{n}{2}\theta$ より，$S_n = \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta \cdot \sin\dfrac{n}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

（ｉ），（ⅱ）より，$\theta = 0$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = 0$

$0 < \theta < 2\pi$ ののとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\theta \cdot \sin\dfrac{n}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$

(2)

（ i ） $\theta=0$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=n$$

（ ii ） $0<\theta<2\pi$ のとき

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ とおくと，

$$\sin\beta\cdot T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\cdot\sin\beta$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{\sin(k\theta+\beta)-\sin(k\theta-\beta)\}$$

ここで， $k\theta-\beta=(k+1)\theta+\beta$ とすると， $\beta=-\frac{\theta}{2}$ ・・・③

また， $\sin\beta\cdot T_n=\frac{1}{2}\{\sin(\theta+\beta)-\sin(n\theta-\beta)\}$ ・・・④

③，④および $0<\frac{\theta}{2}<\pi$ より，

$$T_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \text{ または } T_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cdot\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

（ i ），（ ii ） より，

$\theta=0$ のとき， $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=n$

$0<\theta<2\pi$ ののとき， $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cdot\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$