## 床に垂直に衝突した小球のはねかえりの数列

力学的保存則が成り立つ系で，水平な床と衝突する質量$m$の小球を考える。

床からの高さ$h_0$の点から小球を落とす。

衝突のはねかえり係数を$e$とする。

$n$回衝突直後の速さを$v_n$とする。

$n$回衝突後の最高点の高さを$h_n$とする。

### $n$回衝突直後の速さの数列$\{v_n\}$の一般項$v_n = e^n\sqrt{2gh_0}$の求め方

力学的エネルギー保存則より，$n+1$回目の衝突直前の速さも$v_n$だから，

$v_{n+1} = ev_n$より，$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = e$

これは，数列$\{v_n\}$が初項$v_1$，公比$e$の等比数列であることを示している。

$\therefore v_n = e^{n-1}v_1$　・・・①

また，力学的エネルギー保存則より，$mgh_0 = \dfrac{1}{2}mv_0{}^2$が成り立つから，$v_0 = \sqrt{2gh_0}$

よって，$v_1 = e\sqrt{2gh_0}$　・・・②

①，②より，$\boldsymbol{v_n = e^n\sqrt{2gh_0}}$

### $n$回衝突後の最高点の高さの数列$\{h_n\}$の一般項$h_n = e^{2n}h_0$の求め方

$n+1$回目の衝突直後の小球の速さは，$v_{n+1} = e\sqrt{2gh_n}$であり，

床からの高さは床より上を正とした位置であるから，

$0-\left(e\sqrt{2gh_n}\right)^2 = -2gh_{n+1}$より，$h_{n+1} = e^2h_n$　$\therefore \dfrac{h_{n+1}}{h_n} = e^2$

これは，数列$\{h_n\}$が初項$h_1$，公比$e^2$の等比数列であることを示している。

よって，$h_n = \left(e^2\right)^{n-1}h_1$

これと，$0 - v_1{}^2 = -2gh_1$より，$h_1 = \dfrac{v_1{}^2}{2g} = \dfrac{\left(e\sqrt{2gh_0}\right)^2}{2g} = e^2h_0$

よって，$\boldsymbol{h_n = e^{2n}h_0}$