

重心

重心の公式

$$\text{重心の位置: } \bar{r}_G = \frac{\sum (m_i \bar{r}_i)}{\sum m_i}$$

$$\text{重心の速度: } \bar{v}_G = \frac{\sum (m_i \bar{v}_i)}{\sum m_i}$$

$$\text{重心の加速度: } \bar{a}_G = \frac{\sum (m_i \bar{a}_i)}{\sum m_i}$$

運動量が保存されている運動系の重心から見た運動量

1. 運動系の重心の速度は変化しない。
2. 重心からみた運動系全体の運動量は0である。

重心から見た運動量で扱くと、運動を表す式が単純になるので便利である。

では、1,2について解説する。

1: 運動系の重心は等速度運動を続ける。

系の運動量が保存されているとき、系に外力が働いていない。

したがって、系の運動状態は変化しない。

系の運動状態が変化しないことと系の重心の速度が変化しないのは同値である。

具体的に証明すると、次のようになる。

衝突や分裂において、その直前と直後で速度の向きが変わることがふつうに起こる。

このような場合、 x 軸と y 軸をとり、

それぞれの成分について運動量保存則の式を立てればよい。

重心の運動量も x 成分と y 成分に分け、

それぞれについて運動量保存則の式を立てればよい。

たとえば、

質量が m 、 M の2つの物体の衝突について、

質量 m の物体の衝突直前と衝突直後の速度の x 成分を v_x, v_x'

質量 M の物体の衝突直前と衝突直後の速度の x 成分を V_x, V_x'

とすると、

$$\text{衝突直前の重心の速度の } x \text{ 成分} = \frac{mv_x + MV_x}{m + M}$$

$$\text{衝突直後の重心の速度の } x \text{ 成分} = \frac{mv'_x + MV'_x}{m + M}$$

$$\text{また, 運動量保存則より, } mv_x + MV_x = mv'_x + MV'_x$$

よって,

$$\text{衝突直前の重心の速度の } x \text{ 成分} = \text{衝突直後の重心の速度の } x \text{ 成分}$$

これは, y 成分についても成り立つから,

$$\text{重心の速度 } \vec{v}_G = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M} = \frac{m\vec{v}' + M\vec{V}'}{m + M}$$

ゆえに,

系の運動量が保存されるとき, 衝突や分裂が起こっても重心の速度は変化しない。

2: 重心からみた系の運動量は 0 である。

重心から見た衝突直前と直後の相対運動量は,

衝突直前

$$m(\vec{v} - \vec{v}_G) + M(\vec{V} - \vec{v}_G) = m\vec{v} + M\vec{V} - (m + M)\vec{v}_G = 0 \quad \because \vec{v}_G = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M}$$

衝突直後

$$m(\vec{v}' - \vec{v}_G) + M(\vec{V}' - \vec{v}_G) = m\vec{v}' + M\vec{V}' - (m + M)\vec{v}_G = 0 \quad \because \vec{v}_G = \frac{m\vec{v}' + M\vec{V}'}{m + M}$$

よって,

重心から見た運動量保存則の式は,

$$m(\vec{v} - \vec{v}_G) + M(\vec{V} - \vec{v}_G) = m(\vec{v}' - \vec{v}_G) + M(\vec{V}' - \vec{v}_G) = 0$$

ゆえに,

運動系の運動量が保存されているとき, 運動系の重心から見た運動量は 0 である。

重心の公式の導き方

重心の公式： $\vec{r}_G = \frac{\sum(m_i \vec{r}_i)}{\sum m_i}$ の正しい導き方

重心の公式は、重心のまわりの各質点を受ける重力のモーメントのつり合いから導ける。

しかし、正しくは、次のようにする。

重心は正確には質量中心のことである。

そこで質量中心の求め方について、質点1と質点2から成る系で考えることにする。

質点1の質量を m_1 、位置ベクトルを \vec{r}_1

質点2の質量を m_2 、位置ベクトルを \vec{r}_2 とする。

質点1が質点2から受ける作用反作用の力を \vec{F} 、

質点1が系外から受ける力を \vec{f}_1

質点2が質点1から受ける作用反作用の力を $-\vec{F}$ 、

質点2が系外から受ける力を \vec{f}_2 とすると、

それぞれの運動方程式は、それぞれ

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F} + \vec{f}_1$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F} + \vec{f}_2$$

この質点系全体に働く外力は、これら2式の両辺の和をとればよいから、

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

$$\therefore \frac{d^2(m_1 \vec{r}_1)}{dt^2} + \frac{d^2(m_2 \vec{r}_2)}{dt^2} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \quad \cdots \text{(a)}$$

一方、質点系の重心を \vec{r}_G とすると、

質点系の質量は $m_1 + m_2$ だから、

重心の運動方程式は、

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2} \{(m_1 + m_2) \vec{r}_G\} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \quad \cdots \text{(b)}$$

(a), (b)より、

$$(m_1 + m_2) \vec{r}_G = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

よって,

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

これは, 質点が 3 個以上の系でも成り立つので,

質量中心 \vec{r}_G は, 一般に, $\vec{r}_G = \frac{\sum (m_i \vec{r}_i)}{\sum m_i}$ と表される。