

換算質量と作用反作用または内力による 2 物体の運動

ばねに連結された質量 m_A の質点 A と質量 m_B の質点 B が単振動運動しているとき、地上の観測者が、弾性力の大きさを $|f|$ 、それぞれの加速度を a_A 、 a_B とすると、それぞれの運動方程式は、 $m_A a_A = f$ 、 $m_B a_B = -f$ である。

$$\text{よって、 } a_A = \frac{f}{m_A}, \quad a_B = -\frac{f}{m_B}$$

では、質点 A から見た質点 B の運動方程式はどうなるかという、質点 A から見た質点 B の加速度は、

$$a_B - a_A = -\frac{f}{m_B} - \frac{f}{m_A} = -\frac{m_A + m_B}{m_A m_B} f$$

質点 A から見ても質点 B が外力 $-f$ を受けていることに変わらないから、質点 A から見た質点 B の運動方程式は、

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (a_B - a_A) = -f$$

となる。

つまり、質点 A から質点 B を見ると、

質量 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ の質点が外力 $-f$ を受け、加速度 $a_B - a_A$ で単振動運動している。

逆に、質点 B から質点 A を見ると、

$$a_A - a_B = \frac{f}{m_A} + \frac{f}{m_B} = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B} f \text{ より、}$$

質点 B から見た質点 A の運動方程式は、

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (a_A - a_B) = f$$

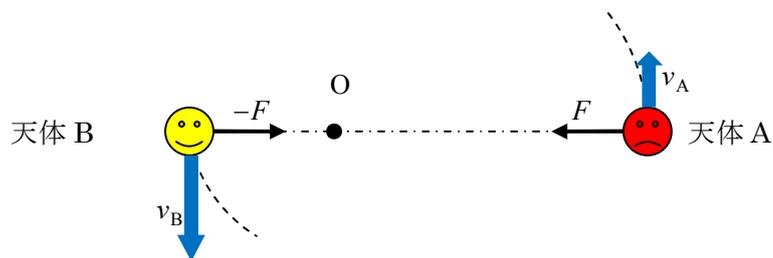
つまり、質点 B から質点 A を見ると、

質量 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ の質点が外力 f を受け、加速度 $a_A - a_B$ で単振動運動している。

このように 2 物体が作用反作用の力のみを及ぼし合いながら運動している場合、一方の物体から見た他方の物体の運動方程式、

すなわち相対運動の運動方程式を立てたときに現れる質量 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ を換算質量という。

例：万有引力（作用反作用の力）で互いのまわりを回る 2 つの天体の運動



質量 m_A の天体 A と質量 m_B の天体 B が、
 重心 O を中心に互いのまわりを等速円運動しているものとする。
 向心力は万有引力であり、天体 A と天体 B の作用反作用の力であるから、
 天体 A が天体 B から受ける万有引力を F とすると、
 天体 B が天体 A から受ける万有引力は $-F$ である。
 天体 A, B の向心加速度をそれぞれ a_A , a_B とすると、
 天体 A の運動方程式は、 $m_A a_A = F$
 天体 B の運動方程式は、 $m_B a_B = -F$
 となる。

よって、

$$a_A = \frac{F}{m_A} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_B = -\frac{F}{m_B} \quad \dots \textcircled{2}$$

天体 B から見た天体 A の加速度は、

①-②より、

$$a_A - a_B = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B} F$$

天体 B から見ても天体 A に働く外力は万有引力 F だから、

天体 B から見た天体 A の運動方程式は、

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (a_A - a_B) = F \text{ となる。}$$

よって、

天体 B から見ると、質量 $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ の天体 A が、天体 B からの万有引力 F を受けて、

天体 B のまわりを向心加速度 $a_A - a_B$ で等速円運動していることになる。

天体 B から見た天体 A の運動

