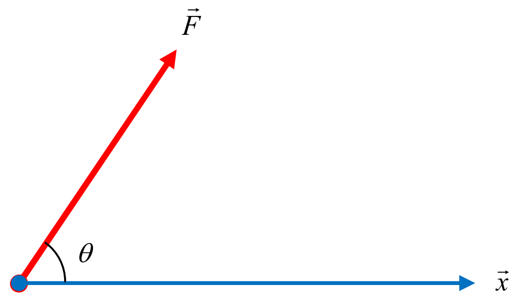
仕事の求め方について

仕事Wは，力ベクトル$\vec{F}$と変位ベクトル$\vec{x}$の内積で与えられる。

$$W=\vec{F}\cdot\vec{x}=\left|\vec{F}\right|\left|\vec{x}\right|\cos\theta$$



力ベクトル$\vec{F}$と変位ベクトル$\vec{x}$が一定ならば，$W=\vec{F}\cdot\vec{x}=\left|\vec{F}\right|\left|\vec{x}\right|\cos\theta$で計算すればよい。

弾性エネルギーや万有引力などのように力の大きさが位置によって変化する場合の仕事

弾性力や万有引力の作用線をx軸をとし，位置xにおける力の大きさを$f(x)$，
変位の始点と終点のx座標をそれぞれx_1，x_2とすると，
区分求積法より，仕事の大きさは，

$$|W|=\left|\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_2-x_1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_1+\frac{k}{n}(x_2-x_1)\right)\right\}\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|$$

例えば，
ばね定数kのばねの伸びが自然長（$x=0$）からx_1に変位したとき，
弾性力のした仕事の大きさは，

$$|W|=\left|\int_0^{x_1}-kxdx\right|=\frac{1}{2}k{x_1}^2$$

変位ベクトルと弾性力の向きは逆だから，

弾性力のした仕事は，$W=|W|\cos 180°=-\frac{1}{2}k{x_1}^2$

弾性力のした仕事＋弾性エネルギー（位置エネルギー）＝0 より，
$x=x_1$における弾性エネルギーは自然長（$x=0$）における弾性エネルギーより，

$\frac{1}{2}k{x_1}^2$だけ大きい。

とくに，自然長の弾性エネルギーを 0 とすると，

$x=x_1$における弾性エネルギーは$\frac{1}{2}k{x_1}^2$である。

万有引力の場合

質量mの質点が距離x離れた質量Mの質点から受ける万有引力の大きさ$f(x)=G\dfrac{Mm}{x^2}$

質量mの質点が無限遠からx_1に変位したときの万有引力がした仕事の大きさ

$$|W|=\left|\int_{\infty}^{x_1} G\frac{Mm}{x^2}dx\right|=\left|\left[-G\frac{Mm}{x}\right]_{\infty}^{x_1}\right|=G\frac{Mm}{x_1}$$

変位の向きと万有引力の向きはどちらも質量Mの質点の向きだから，
質量mの質点が無限遠からx_1に変位したときの万有引力がした仕事は，

$$W=|W|\cos 0°=G\frac{Mm}{x_1}$$

万有引力がした仕事＋万有引力のエネルギー（位置エネルギー）＝0 より，
$x=x_1$における万有引力のエネルギーは無限遠（$x=\infty$）における万有引力のエネルギーより，

$G\dfrac{Mm}{x_1}$だけ小さい。

とくに，無限遠における万有引力のエネルギーを 0 とすると，

$x=x_1$における万有引力のエネルギーは$-G\dfrac{Mm}{x_1}$である。