

## 単振動と単振動の力学的エネルギー

### 1. 弾性力と単振動

弾性力も単振動も力は  $F = -Kx$  の形で表されるが、

$x = 0$  の位置は、

弾性力の場合、弾性体の自然状態の位置

単振動の場合、振動する物体に働く力のつり合いの位置である。

たとえば、おもりをつるしたばねについて、

ばねの弾性力を考えるときは、ばねの自然長を  $x = 0$  とし、

おもりの単振動で考える場合は、おもりに働く力がつり合った位置を  $x = 0$  とする。

尚、単振動の  $x = 0$  の位置は単振動の振動中心である。

### 2. 単振動中の質点に働く外力の和と単振動の運動方程式

単振動は次のように定義される。

尚、ここでいう「質点に働く外力」とは、「質点に働く外力の和」のことである。

質点に働く外力の大きさが（質点に働く力の）つり合いの位置からの距離に比例し且つその向きが常につり合いの位置のとき、

質点は一直線上を、つり合いの位置を中心に、振動運動する。

このような質点の運動を単振動運動という。

「質点が一直線上を運動するならば、外力の向きも同一直線上にある」

「つり合いの位置に向かう力とは、質点に働く外力のことである」

「つり合いの位置に向かう力の大きさは、質点からの距離に比例する」

ことから、

質点に働く外力を  $F$ 、つり合いの位置からの変位を  $X$ 、比例定数を  $K(>0)$  とすると、

質点に働く外力の大きさは、 $|F| = K|X|$  ( $K > 0$ ) と表せる。

よって、数学的には、 $F = KX$  または  $F = -KX$  となる。

ところが、質点に働く外力の向きは、常につり合いの位置の向きだから、

質点がつり合いの位置から右向きに変位したときに質点を受ける外力は左向き、

左向きに変位したときに質点を受ける外力の向きは右向きとなる。

つまり、質点の変位が正ならば質点を受ける外力の向きは負、

質点の変位が負ならば質点を受ける外力の向きは正となる。

よって、物理的に正しいのは、 $F = -KX$  ( $K > 0$ ) である。

ゆえに、質点の質量を  $m$ 、単振動の加速度を  $a$  とすると、

その質点の単振動の運動方程式は、 $ma = -KX$  と表される。

**まとめ**

質量  $m$  の質点に働く外力のつり合いの位置からの変位を  $X$  とおいたとき、  
 質点の運動方程式が  $ma = -KX$  と表されるなら、  
 質点の運動は、つり合いの位置 ( $X = 0$ ) を振動中心とする単振動運動である。

**3. 単振動の運動方程式と単振動の式****単振動の式**

(物理小ネタ「等速円運動の式から単振動の式へ」を参照してください。)

初期位相  $\alpha$  (時刻  $t = 0$  における角度)、振幅  $A$ 、角速度 (角振動数)  $\omega (> 0)$  とすると、  
 質点の振動中心からの変位  $X$  は、

$$X = A \sin(\omega t + \alpha) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。

これより、質点の速度  $v$  は、

$$\begin{aligned} v &= \frac{dX}{dt} \\ &= A\omega \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

質点の加速度  $a$  は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \\ &= -\omega^2 \cdot A \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

よって、①より、 $a = -\omega^2 X \quad \dots \textcircled{2}$

**単振動の式と単振動の運動方程式との融合**

一方、単振動の運動方程式  $ma = -KX$  より、

$$a = -\frac{K}{m} X \quad \dots \textcircled{3}$$

②, ③より、

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$\omega T = 2\pi$  より、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

## まとめ

初期位相  $\alpha$  , 振幅  $A$  , 角速度 (角振動数)  $\omega (>0)$  とすると,  
 質点の振動中心からの変位  $X$  , 質点の速度  $v$  , 質点の加速度  $a$  は, それぞれ,  
 $X = A \sin(\omega t + \alpha)$  ,  $v = A \omega \cos(\omega t + \alpha)$  ,  $a = -A \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 X$   
 また, このときの質量  $m$  の質点の運動方程式を  $ma = -KX$  とすると,

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

補足：単振動の変位  $X$  の表し方

単振動の運動方程式  $ma = -KX$  と  $a = \frac{d^2 X}{dt^2}$  より,

$$\text{単振動の微分方程式 } m \frac{d^2 X}{dt^2} = -KX \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで, 単振動の振幅を  $A$  , 角振動数を  $\omega (>0)$  とし,  
 $X = A \sin \omega t$  とおくと,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 X \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$  のとき,

①の解は  $X = A \sin \omega t$  となる。

よって,

単振動の運動方程式  $ma = -KX$  において,

変位  $X$  は,  $X = A \sin \omega t$   $\left( \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \right)$  の形で表すことができる。

$X = A \cos \omega t$  とおくと,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -A \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 X \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ③より,  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$  のとき,

①の解は,  $X = A \cos \omega t$  となる。

よって, 単振動の運動方程式  $ma = -KX$  において,

変位  $X$  は,  $X = A \cos \omega t$   $\left( \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \right)$  の形で表すことができる。

$X = A \sin \omega t + A \cos \omega t$  とおくと,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t - A \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 X \quad \dots \textcircled{4}$$

①, ④より,  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$  のとき,

①の解は  $X = A \sin \omega t + A \cos \omega t$  となる。

よって,

単振動の運動方程式  $ma = -Kx$  において,

変位  $X$  は,  $X = A \sin \omega t + A \cos \omega t$  ( $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ) の形で表すことができる。

など, 変位  $X$  の表し方はいろいろある。

$X = A \sin \omega t$  ( $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ) などを, 微分方程式  $m \frac{d^2 X}{dt^2} = -KX$  の特殊解とよぶ。

別解: 数学Ⅲの積分の練習問題のつもりで理解してください。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 = \frac{dv^2}{dt} = \frac{dv^2}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} = 2 \frac{dX}{dt} \cdot \frac{d^2 X}{dt^2} \text{ より, } \frac{d^2 X}{dt^2} \cdot \frac{dX}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dt} \right)^2$$

$$\frac{dX^2}{dt} = \frac{dX^2}{dX} \cdot \frac{dX}{dt} = 2X \cdot \frac{dX}{dt} \text{ より, } X \frac{dX}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dX^2}{dt}$$

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -KX \text{ の両辺に } \frac{dX}{dt} \text{ をかけると, } m \frac{d^2 X}{dt^2} \cdot \frac{dX}{dt} = -KX \frac{dX}{dt}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} \cdot \frac{dX}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dt} \right)^2, \quad X \frac{dX}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dX^2}{dt} \text{ より,}$$

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 = -K \frac{dX^2}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 = -\frac{K}{m} \frac{dX^2}{dt}$$

これを  $t$  について不定積分すると,

$$\left( \frac{dX}{dt} \right)^2 = -\frac{K}{m} X^2 + c_1 \quad (c_1 \text{ は積分定数})$$

$$\therefore \frac{dX}{dt} = \pm \sqrt{c_1 - \frac{K}{m} X^2}$$

± いずれも同じ結果になるので,  $\frac{dX}{dt} = \sqrt{c_1 - \frac{K}{m} X^2}$  で進めると,  $\frac{dX}{\sqrt{c_1 - \frac{K}{m} X^2}} = dt$  より,

$$\frac{dX}{\sqrt{c_1} \sqrt{1 - \frac{K}{mc_1} X^2}} = dt \quad \therefore \int \frac{dX}{\sqrt{c_1} \sqrt{1 - \frac{K}{mc_1} X^2}} = \int dt$$

ここで、左辺の不定積分について、

$$\sqrt{\frac{K}{mc_1}}X = \sin \theta \text{ とおくと, } \sqrt{\frac{K}{mc_1}}dX = \cos \theta d\theta \quad \therefore dX = \sqrt{\frac{mc_1}{K}} \cos \theta d\theta$$

$$\therefore \int \frac{dX}{\sqrt{c_1} \sqrt{1 - \frac{K}{mc_1} X^2}} = \int \sqrt{\frac{mc_1}{K}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{c_1} \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{m}{K}} \theta$$

よって、 $\sqrt{\frac{m}{K}}\theta = t + c_2$  ( $c_2$  は積分定数)

$$\therefore \theta = \sqrt{\frac{K}{m}}t + c_3 \quad \left( c_3 = \sqrt{\frac{K}{m}}c_2 \right)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin \left( \sqrt{\frac{K}{m}}t + c_3 \right)$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{K}{mc_1}}X \text{ とおいたから, } \sqrt{\frac{K}{mc_1}}X = \sin \left( \sqrt{\frac{K}{m}}t + c_3 \right)$$

$$\therefore X = \sqrt{\frac{mc_1}{K}} \sin \left( \sqrt{\frac{K}{m}}t + c_3 \right)$$

ここで、 $A = \sqrt{\frac{mc_1}{K}}$ 、 $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$  とおくと、

単振動の微分方程式  $m \frac{d^2 X}{dt^2} = -KX$  の解は、

$$X = A \sin(\omega t + c_2)$$

あるいは、

$$X = A \sin(\omega t + c_2) = (A \cos c_2) \sin \omega t + (A \sin c_2) \cos \omega t \text{ より,}$$

$$X = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (a = A \cos c_2, b = A \sin c_2)$$

と表せる。

#### 4. 単振り子の運動方程式と単振動の式

まずは、用語の定義から

単振り子

軽い糸の上端を固定して下端におもりをつるし、これを鉛直面内で振動させるもの  
振り子

定点のまわりに振動する物体

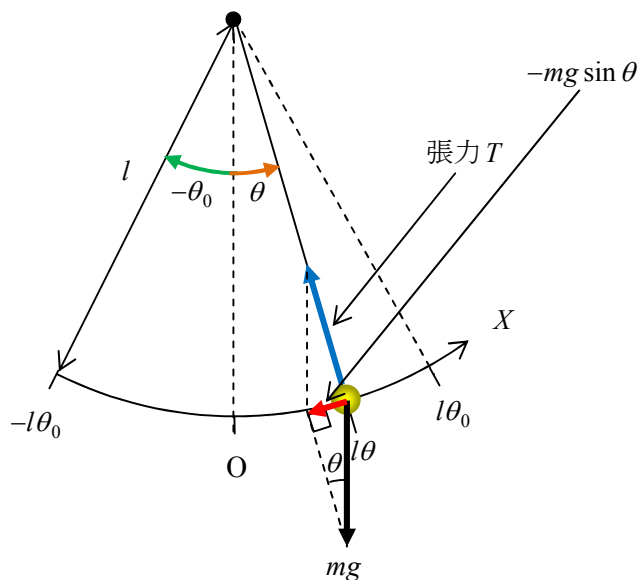
では、本題

質量  $m$  の振り子に働く外力のつり合いの位置を原点  $O$  とし、

振り子の軌道（円弧）の反時計まわりの向きを  $X$  軸とする。

また、振り子の振幅の大きさを  $l\theta_0$  とし、 $\theta_0$  は十分小さいものとする ( $\theta_0 \approx 0$ )。

ただし、図は、見やすくするため  $\theta_0$  をわざと大きくとった。



## 振り子の運動方程式

振り子は軌道（円弧）の接線方向の外力を受けて単振動をする。

糸の張力  $T$  の円弧の接線方向の分力は  $0$  だから、

張力  $T$  は振り子の運動方程式に含まれない。

よって、振り子の単振動運動の原動力となる外力は、

重力の円弧の接線成分  $-mg \sin \theta$  である。

よって、振り子の単振動の運動方程式は、

$$ma = -mg \sin \theta$$

ここで、 $|\theta| < \theta_0 \approx 0$  だから、 $\sin \theta = \theta$  としてよい。

$$\text{よって、 } ma = -mg\theta \quad \dots \text{④}$$

$$\text{また、振り子の変位 } X = l\theta \quad \dots \text{⑤}$$

$$\text{④、⑤より、 } ma = -mg \cdot \frac{X}{l} \quad \dots \text{⑥}$$

$$\therefore ma = -\frac{mg}{l} X$$

$\frac{mg}{l}$  は定数だから、運動方程式⑥は単振動を表している。

## 単振動の式

振り子の振幅の大きさは  $l\theta_0$  であり、初期位相を  $\alpha$ 、角振動数を  $\omega (> 0)$  とすると、

$$X = l\theta_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\text{振り子の速度 } v = \frac{dX}{dt} = l\theta_0 \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{振り子の加速度 } a = \frac{dv}{dt} = -l\theta_0 \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 X \quad \dots \text{⑦}$$

## 単振動の式と単振動の運動方程式との融合

$$\text{⑥より、 } a = -\frac{g}{l} X \text{ これと⑦より、}$$

$$-\omega^2 X = -\frac{g}{l} X \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

以上より、単振り子は振幅  $l\theta_0$ 、周期  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  の単振動運動を行う。

## 補足

⑥について、単振動の運動方程式の一般形  $ma = -KX$  より、 $K = \frac{mg}{l}$

これを公式  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$  に代入すると、 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  が得られる。

## 5. 単振動の位置エネルギーと力学的エネルギー保存則

(物理小ネタ「保存力」を参照してください)

### A. 保存力のみによる単振動の力学的エネルギー

質点に働く外力が保存力のみによる単振動運動の場合、

質点に働く保存力のつり合い位置（保存力の和が0となる位置）を基準（=0）とし、

質点の運動方向に適切な軸をとる。

このときの質点の変位（位置）を  $X$  とし、 $X$  において質点に働く保存力を  $F$  とすると、 $F = -KX$  が成り立つ。

#### A-1. 単振動の位置エネルギー

保存力とつり合う外力がする仕事は位置エネルギーに変化する。

つり合いの位置からの変位を  $X$ 、 $X$  変位した質点に働く保存力を  $F$  とすると、

$F = -KX$  だから、それとつり合う外力を  $f$  とすると、 $f = KX$  である。

よって、質点をつり合いの位置から  $X$  変位させるとき、

外力がする仕事  $W = \frac{1}{2}KX^2$  であり、このとき単振動の位置エネルギーは  $\frac{1}{2}KX^2$  変化する。

これと、つり合いの位置、すなわち  $X = 0$  における単振動の位置エネルギー=0 より、

つり合いの位置から  $X$  変位した位置の単振動の位置エネルギーは  $\frac{1}{2}KX^2$  である。

#### A-2. 単振動の力学的エネルギー保存則

保存力の位置エネルギー変化は、はじめの位置とおわりの位置だけで決まるから、

つり合いの位置の保存力の位置エネルギーを0 とすると、

位置  $X$  において、保存力の位置エネルギー=単振動の位置エネルギー= $\frac{1}{2}KX^2$  となる。

また、非保存力が働かない場合、力学的エネルギー保存則が成り立つ。

よって、 $\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$  が成り立つ。

#### 補足

質点に複数の保存力が作用している運動で、その運動が単振動運動であれば、

力学的エネルギー保存の法則を

「位置エネルギーの総和+運動エネルギー=一定」の式を使うより、

つり合いの位置を基準にした力学的エネルギー保存の法則

「 $\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$ 」の式を使う方が楽なのは明らかである。



**B. 一定の非保存力がはたらく場合の単振動の力学的エネルギー保存****B-1. たとえ非保存力が働いていても、そのベクトル（大きさと向き）が一定であれば、  
単振動運動は続く**

単振動運動の原動力は、質点に働く保存力のつり合いの位置からの変位を  $x$  としたとき、質点に働く保存力の和が  $F_0 = -Kx$  と表せる力（つり合いの位置に戻ろうとする復元力）であった。

保存力の和  $F_0$  も保存力だから、これを単振動運動の保存力と呼ぶことにする。

質量  $m$  の質点が単振動運動の保存力  $F_0 = -Kx$  をうけて、

運動方程式  $ma = -Kx$  の単振動運動をしているとする。

ここに、質点の単振動の向きに大きさと向きが一定の非保存力  $f$  を働かせると、

質点が受ける外力の和  $F = F_0 + f = -Kx + f = -K\left(x - \frac{f}{K}\right)$  となる。

ここで、 $X = x - \frac{f}{K}$  とおけば、質点の運動方程式  $ma = -KX$  が得られる。

これは、 $X = 0$  を振動中心とする質量  $m$  の質点の単振動の運動方程式である。

よって、

保存力を受けて単振動運動をしている質点に大きさと向きが一定の非保存力が働いても、

振動中心が  $x = 0$  から  $x = \frac{f}{K}$   $\left(\because x - \frac{f}{K} = 0\right)$  に移動し、

また、振動中心の移動により振幅の大きさも変わるが、

質点の単振動運動そのものは継続する。

これは、非保存力が働いても単振動運動が成り立つ場合があることを示しており、

このような非保存力の代表例に、動摩擦力がある。

非保存力が動摩擦力のとき（向きが周期的に変化する非保存力のとき）の単振動運動

ばね定数  $K$  のばねにつながれた質量  $m$  の物体が、  
動摩擦力  $f$  を受けながら単振動運動する場合を考えてみよう。

尚、ばねの自然長の位置を  $x=0$  とする。

### 1. 振動中心は2つある

振動中心を  $x_0$  とすると、 $x_0 - \frac{f}{K} = 0$  より、 $x_0 = \frac{f}{K}$

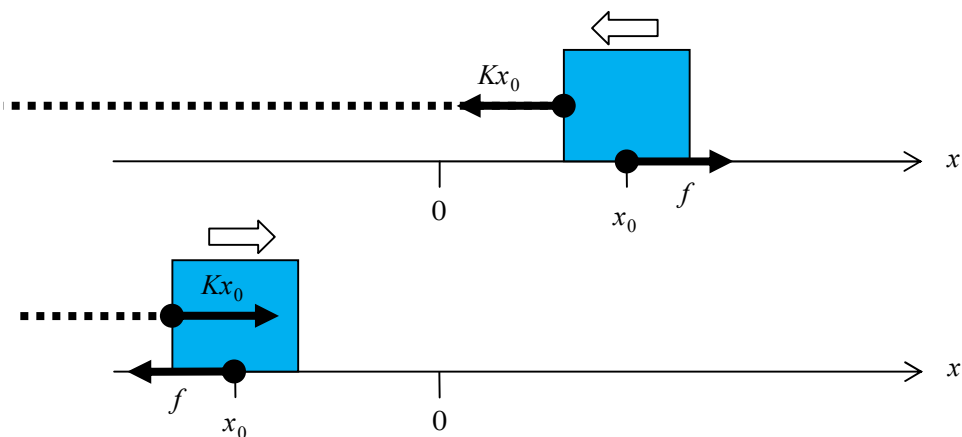
物体の運動の向きが負のとき

動摩擦力  $f > 0$  より、振動中心  $x_0 = \frac{f}{K} > 0$

物体の運動の向きが正のとき

動摩擦力  $f < 0$  より、振動中心  $x_0 = \frac{f}{K} < 0$

また、単振動の周期  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$  より、振動中心が入れ替わる周期  $= \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{K}}$



2. 振動中心が入れ替わるたびに振幅が小さくなっていき、物体はやがて静止する。

$x_{\max} > |x_0|$  ( $|-Kx_{\max}| > \text{最大摩擦力の大きさ}$ ) まで物体を移動させてから放すと、物体は負の向きに運動するから、 $x = |x_0|$  を振動中心とする単振動運動をする。

よって、振幅  $A_1 = x_{\max} - |x_0|$  ……⑧

また、単振動の周期を  $T$  とすると、物体を放してから  $\frac{T}{2}$  後

物体は  $x = |x_0| - (x_{\max} - |x_0|) = 2|x_0| - x_{\max}$  まで移動し静止する。

このとき、 $2|x_0| - x_{\max} < -|x_0|$  ( $|-K(2|x_0| - x_{\max})| > \text{最大摩擦力の大きさ}$ ) であれば、

次に物体の運動は、 $x = -|x_0|$  を振動中心とする単振動運動に変わる。

このとき、

$$\begin{aligned} \text{振幅 } A_2 &= -|x_0| - (2|x_0| - x_{\max}) \\ &= x_{\max} - 3|x_0| \quad \dots\dots \text{⑨} \end{aligned}$$

⑧、⑨より、 $A_1 - A_2 = 2|x_0|$

こうして、 $\frac{T}{2}$  ごとに振幅が  $2|x_0|$  ずつ小さくなっていく。すなわち振動が減衰していく。

やがて、振幅が最大となる位置で質点が静止したとき、

$$|F| = \left| -K \left( x_n - \frac{f}{K} \right) \right| < \text{最大摩擦力 } \mu mg \text{ となり、物体の単振動運動が終了する。}$$

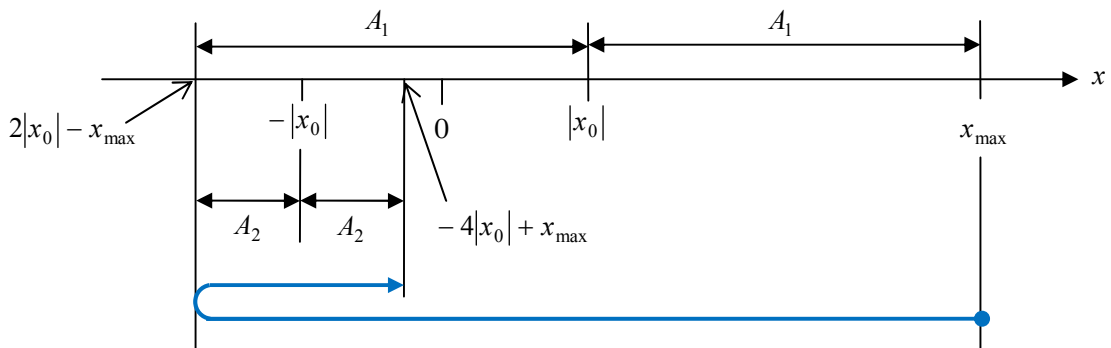
例

物体を下図  $x_{\max}$  で放すと、 $x = -4|x_0| + x_{\max}$  で物体は静止する。

$$|k(-4|x_0| + x_{\max})| < kx_0 = |f|$$

動摩擦係数  $f$  の大きさは最大摩擦係数  $\mu mg$  より小さいから、

物体は  $x = -4|x_0| + x_m$  で完全に静止する。



**B-2. 非保存力が働いていても、そのベクトル（大きさと向き）が一定であれば、単振動運動の力学的エネルギー（振動中心を位置エネルギーの基準位置にした力学的エネルギー）は保存される。**

物体が単振動の保存力  $F_0 = -Kx$  ( $x$  は物体に働く **保存力のつり合いの位置** からの変位) に加え、 **向きと大きさが一定の非保存力**  $f$  をも受けて単振動運動をしている場合でもその力学的エネルギーが保存されることを定量的に確かめてみよう。

### 確認

物体の位置が同一直線上を  $x_1$  から  $x_2$  へ変化したときを考える。

力学的エネルギーと非保存力による仕事の関係

- ・位置  $x_1$  の力学的エネルギー + 非保存力  $f$  の仕事 = 位置  $x_2$  の力学的エネルギー
- ・位置  $x_1, x_2$  の運動エネルギーを、それぞれ  $\frac{1}{2}mv_1^2, \frac{1}{2}mv_2^2$  とする。
- ・位置  $x_1, x_2$  の保存力の位置エネルギーは、それぞれ  $\frac{1}{2}Kx_1^2, \frac{1}{2}Kx_2^2$  である。

以上より、

$$\frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + f(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}Kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

ここで、この単振動の運動方程式  $ma = -K\left(x - \frac{f}{K}\right) = -KX$  より、

$$X_1 = x_1 - \frac{f}{K}, \quad X_2 = x_2 - \frac{f}{K} \quad \text{とおくと、} \quad x_1 = X_1 + \frac{f}{K}, \quad x_2 = X_2 + \frac{f}{K} \quad \text{だから、}$$

$$\frac{1}{2}K\left(X_1 + \frac{f}{K}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + f\left\{\left(X_2 + \frac{f}{K}\right) - \left(X_1 + \frac{f}{K}\right)\right\} = \frac{1}{2}K\left(X_2 + \frac{f}{K}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

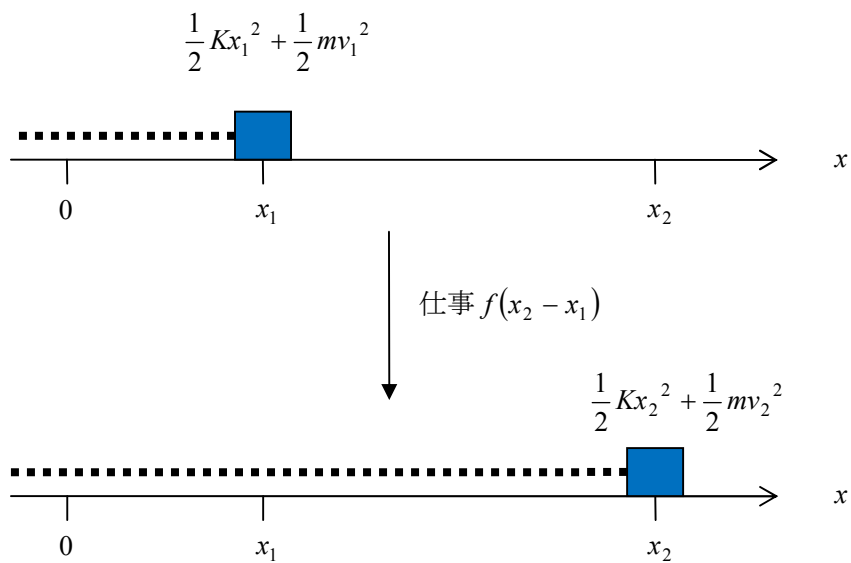
$$\frac{1}{2}KX_1^2 + X_1f + \frac{f^2}{2K} + \frac{1}{2}mv_1^2 + fX_2 - fX_1 = \frac{1}{2}KX_2^2 + X_2f + \frac{f^2}{2K} + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\frac{1}{2}KX_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}KX_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

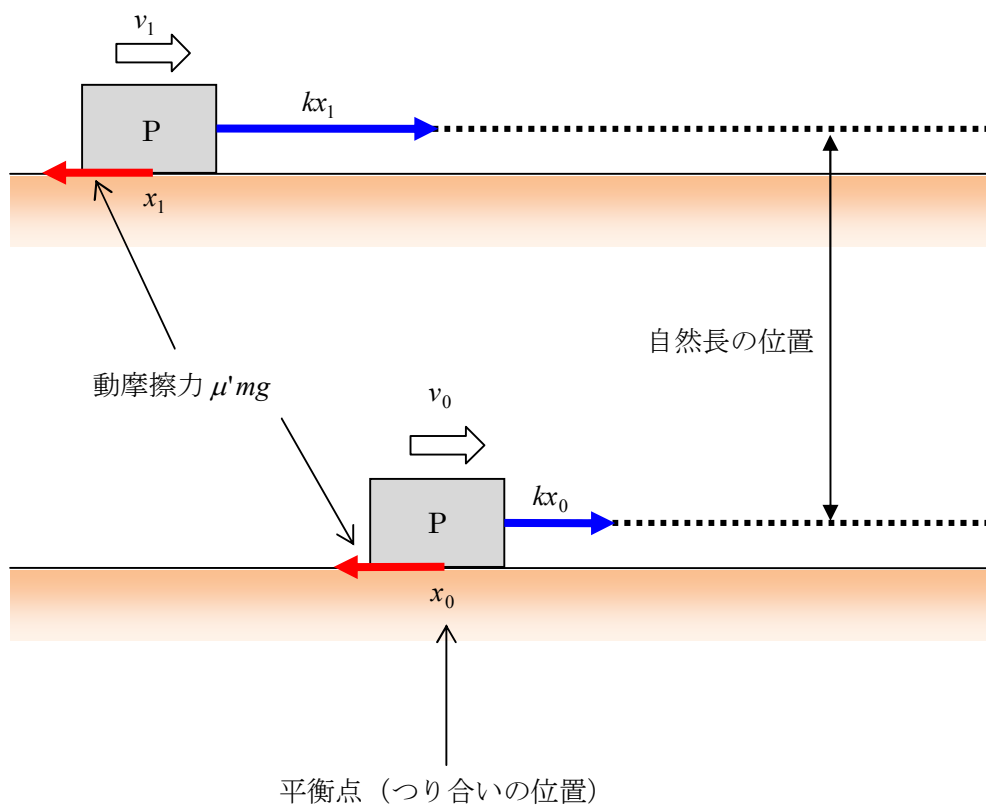
$$\text{よって、} \quad \frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$$

同様に、物体の逆方向の移動についても、 $\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$

これは、非保存力が働いていても、そのベクトルが一定であれば、単振動運動の力学的エネルギー（振動中心を位置エネルギーの基準位置にした力学的エネルギー保存の法則）は保存されることを示している。  
が成り立つことを示している。



具体的に解説すると、



図で、 $x_1, x_0$  をばねの自然長からの伸びとし、

$x_0$  はとくに動摩擦力とばねの復元力  $kx_0$  の平衡点（つり合いの位置）とする。

また、動摩擦係数を  $\mu'$ 、物体 P の質量を  $m$  とする。

すると、平衡点における加速度は 0 だから、

$$m \cdot 0 = \mu' mg - kx_0 \text{ より } \mu' mg = kx_0$$

物体 P が位置  $x_1$  から位置  $x_0$  に位置に変位するとき動摩擦力がする仕事は

$$-\mu' mg(x_1 - x_0)$$

物体 P の位置  $x_1$ 、位置  $x_0$  における力学的エネルギーはそれぞれ、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2, \quad \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \text{ だから、}$$

よって、力学的エネルギーと動摩擦力がする仕事の関係式は、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 - \mu' mg(x_1 - x_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

これと  $\mu' mg = kx_0$  より、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 - kx_0(x_1 - x_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 - kx_0x_1 + kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

ここで、 $x_0$  を位置エネルギーの基準位置にとると、

つまり、 $x_0$  の位置エネルギーを 0 とすると、

$$\left( \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 - kx_0x_1 + kx_0^2 \right) - \frac{1}{2}kx_0^2 = \left( \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \right) - \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 - kx_0x_1 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

よって、

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_0)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

これより、

位置エネルギーの基準位置をつり合いの位置（あるいは運動の平衡点）にとれば、

一定の非保存力が働いていても力学的エネルギーが保存される。

**まとめ**

物体の運動方程式が  $ma = -K\left(x - \frac{f}{K}\right)$  で表される場合

$f$  が保存力であろうとなかろうと一定の値でありさえすれば、

その物体の運動は単振動運動であり、 $X = x - \frac{f}{K}$  とおけば、

力学的エネルギー保存則： $\frac{1}{2}KX^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{一定}$

が成り立つ。

尚、 $X$  はつり合いの位置（あるいは運動の平衡点）からの変位を表す。