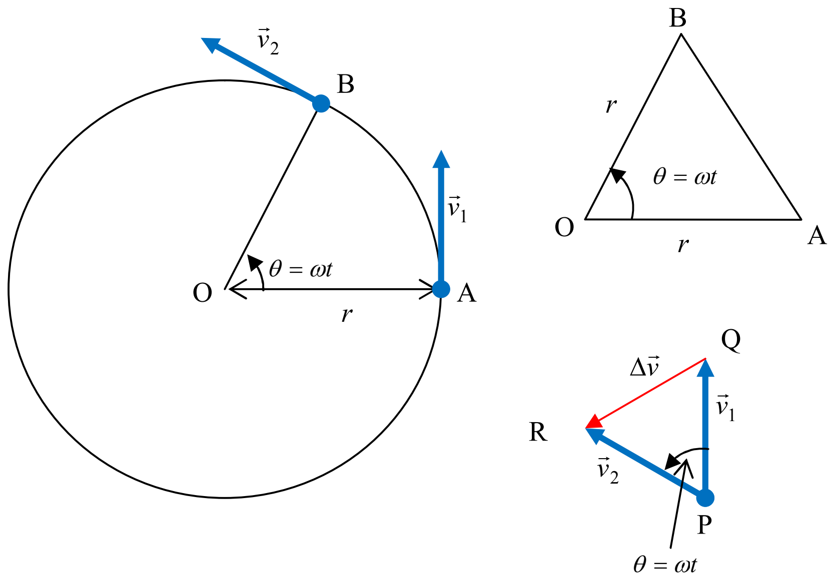
等速円運動の式の導き方

速さが一定の円運動を等速円運動という。

円運動では運動の軌跡が円になるよう速度の向きを連続的に変えるための力が必要である。

この力は円の中心方向を向くので向心力といい，

等速円運動している物体には向心力だけがはたらいている。



速さについて

角速度を $\omega(\text{rad/s})$ とすると，半径 r の円軌道の単位時間に描く弧の長さが速さだから，

$V = r\omega$

加速度の大きさと向きについて

上図について，

$\triangle\text{OAB} \backsim \triangle\text{PQR}$ より，

（$\because$ OA＝OB，PQ＝PR，∠AOB＝∠QPR＝θ）

$$\frac{\text{AB}}{\text{QR}} = \frac{\text{OA}}{\text{PQ}}$$

$$\therefore \frac{\text{AB}}{|\Delta\vec{v}|} = \frac{r}{|\vec{v}_1|}$$

$$\therefore \frac{\text{AB}}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}_1|}$$

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ より，$\Delta\vec{v}$ は速度の変化を表す。

ここで，十分小さい時間tをとると，
$\Delta\vec{v}$は等加速度直線運動と見なせるので，このときの加速度を$\vec{a}$とすると，$\Delta\vec{v}=\vec{a}\cdot t$

また，変位$\mathrm{AB}=\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=r\omega t$としてよいから，

$\dfrac{\mathrm{AB}}{r}=\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}_1|}$から，$\dfrac{r\omega t}{r}=\dfrac{|\vec{a}|t}{r\omega}$が得られる。
よって，

$$|\vec{a}|=r\omega^2$$

また，

$$\lim_{t\to 0}\angle\mathrm{PQR}=\lim_{t\to 0}\frac{\pi-\angle\mathrm{QPR}}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{\pi-\omega t}{2}=\frac{\pi-0}{2}=\frac{\pi}{2}$$

より，
加速度$\vec{a}$の向きは常に円の中心を向く。

等速円運動の運動方程式

質量mの物体が向心力Fを受け等速円運動をしているとき，
円の中心方向を軸にとると，$ma=F$より，

$$mr\omega^2=F$$

あるいは，

$a=r\omega^2=\dfrac{(r\omega)^2}{r}=\dfrac{v^2}{r}$より，

$$m\cdot\frac{v^2}{r}=F$$

まとめ

質量mの質点が角速度ωで軌道半径rの等速円運動をしているとき，
その速さをv，向心加速度をa，向心力の大きさをFとすると，

$$v=r\omega$$

$$a=r\omega^2=\frac{v^2}{r}$$

$$F=mr\omega^2=m\cdot\frac{v^2}{r}$$