運動量保存則と運動エネルギー変化（質点・重心・相対運動）の関係

1. 質点の運動エネルギーの和＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギーの和

＝重心の運動エネルギー＋相対運動の運動エネルギーの和

簡単のため，同一直線上を，

質量m の質点と質量M の質点が，それぞれ速度v と速度V で運動しているものとする。

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m(v-v_\mathrm{G})^2+\frac{1}{2}M(V-v_\mathrm{G})^2 \quad , \quad \left(v_\mathrm{G}=\frac{mv+MV}{m+M}\right)$$

証明

質点の運動エネルギーの和＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギーの和

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2&=\frac{1}{2}m\{(v-v_\mathrm{G})+v_\mathrm{G}\}^2+\frac{1}{2}M\{(V-v_\mathrm{G})+v_\mathrm{G}\}^2\\
&=\frac{1}{2}m\left\{(v-v_\mathrm{G})^2+2v_\mathrm{G}(v-v_\mathrm{G})+{v_\mathrm{G}}^2\right\}+\frac{1}{2}M\left\{(V-v_\mathrm{G})^2+2v_\mathrm{G}(V-v_\mathrm{G})+{v_\mathrm{G}}^2\right\}\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m(v-v_\mathrm{G})^2+\frac{1}{2}M(V-v_\mathrm{G})^2+mv_\mathrm{G}(v-v_\mathrm{G})+Mv_\mathrm{G}(V-v_\mathrm{G})\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m(v-v_\mathrm{G})^2+\frac{1}{2}M(V-v_\mathrm{G})^2+v_\mathrm{G}\{mv+MV-(m+M)v_\mathrm{G}\}\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m(v-v_\mathrm{G})^2+\frac{1}{2}M(V-v_\mathrm{G})^2+v_\mathrm{G}\left\{mv+MV-(m+M)\cdot\frac{mv+MV}{m+M}\right\}\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m(v-v_\mathrm{G})^2+\frac{1}{2}M(V-v_\mathrm{G})^2
\end{aligned}$$

質点の運動エネルギーの和＝＝重心の運動エネルギー＋相対運動の運動エネルギーの和

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m(v-v_\mathrm{G})^2+\frac{1}{2}M(V-v_\mathrm{G})^2\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m\left(v-\frac{mv+MV}{m+M}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(V-\frac{mv+MV}{m+M}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}m\left\{\frac{M}{m+M}(v-V)\right\}^2+\frac{1}{2}M\left\{\frac{m}{m+M}(V-v)\right\}^2\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}\frac{mM^2}{(m+M)^2}(v-V)^2+\frac{1}{2}\frac{m^2M}{(m+M)^2}(v-V)^2\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_\mathrm{G}}^2+\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v-V)^2
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v-V)^2$ について

$\frac{mM}{m+M}$ は換算質量と呼ばれるもので，質量 m と質量 M の質点が，
それぞれ作用 F，反作用 $-F$ の関係の外力を受け，加速度 a，A で運動をするとき，
その相対運動の運動方程式を立てると現れる質量である。

$ma=F$ より，$a=\frac{F}{m}$ ・・・①

$MA=-F$ より，$A=-\frac{F}{M}$ ・・・②

質量 m の質点の質量 M の質点に対する加速度（相対加速度）は，
①，②より，

$$
\begin{aligned}
a-A&=\frac{F}{m}-\left(-\frac{F}{M}\right)\\
&=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)F\\
&=\frac{m+M}{mM}F
\end{aligned}
$$

となり，
これを変形することにより，
相対加速度の運動方程式 $\frac{mM}{m+M}(a-A)=F$ が得られる。

$v-V$ は相対速度を表すから，
$\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v-V)^2$ は相対運動の運動エネルギーと見ることができる。

まとめ
質点の運動エネルギーの和
＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギーの和
＝重心の運動エネルギー＋相対運動の運動エネルギー

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2&=\frac{1}{2}(m+M){v_G}^2+\frac{1}{2}m(v-v_G)^2+\frac{1}{2}M(V-v_G)^2\\
&=\frac{1}{2}(m+M){v_G}^2+\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v-V)^2
\end{aligned}
$$

2. 重心から見た質点の運動量の総和は **0** である。

$$m(v-v_G)+M(V-v_G)=0$$

証明

$$\begin{aligned} m(v-v_G)+M(V-v_G) &= mv+MV-(m+M)v_G \\ &= mv+MV-(m+M)\cdot\frac{mv+MV}{m+M} \\ &= mv+MV-(mv+MV) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. 運動量保存則が成り立つときの質点の運動エネルギー変化と重心の運動エネルギー

運動量保存則が成り立つとき，$mv+MV$ は定数となるので，

重心の速度 $v_G=\dfrac{mv+MV}{m+M}$ は一定である。

また，重心の速度が一定のとき，$mv+MV$ は一定だから，運動量が保存される。

よって，

運動量保存則が成り立つことと，重心の運動エネルギーが保存されることは同値である。

ここで，運動量保存則が成り立つ系において，

質量 m の質点と質量 M の質点の速度が，それぞれ v_0 から v_1，V_0 から V_1 に変化したとする。

$$mv_0+MV_0=mv_1+MV_1 \quad (v_0\neq v_1, V_0\neq V_1)$$

このときの運動エネルギー変化は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1{}^2+\frac{1}{2}MV_1{}^2 &= \frac{1}{2}(m+M)v_G{}^2+\frac{1}{2}m(v_1-v_G)^2+\frac{1}{2}M(V_1-v_G)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m+M)v_G{}^2+\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v_1-V_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}MV_0{}^2 &= \frac{1}{2}(m+M)v_G{}^2+\frac{1}{2}m(v_0-v_G)^2+\frac{1}{2}M(V_0-v_G)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m+M)v_G{}^2+\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v_0-V_0)^2 \end{aligned}$$

$v_G=$ 一定より，

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2+\frac{1}{2}MV_1{}^2-\left(\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}MV_0{}^2\right)=\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v_1-V_1)^2-\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v_0-V_0)^2$$

よって，

運動量保存則が成り立つとき

運動エネルギーの変化＝相対運動の運動エネルギーの変化