力学的波動関数の応用　その 1　定常波

A.　定常波の力学的波動関数

1.　定常波とは

振動の振幅の大きさが位置によって周期的に変化,

つまり振幅の大きさが位置 x の三角関数（sin または cos）で表されるため,

見かけ上，変位（波）が伝わらない波を定常波または定在波という。

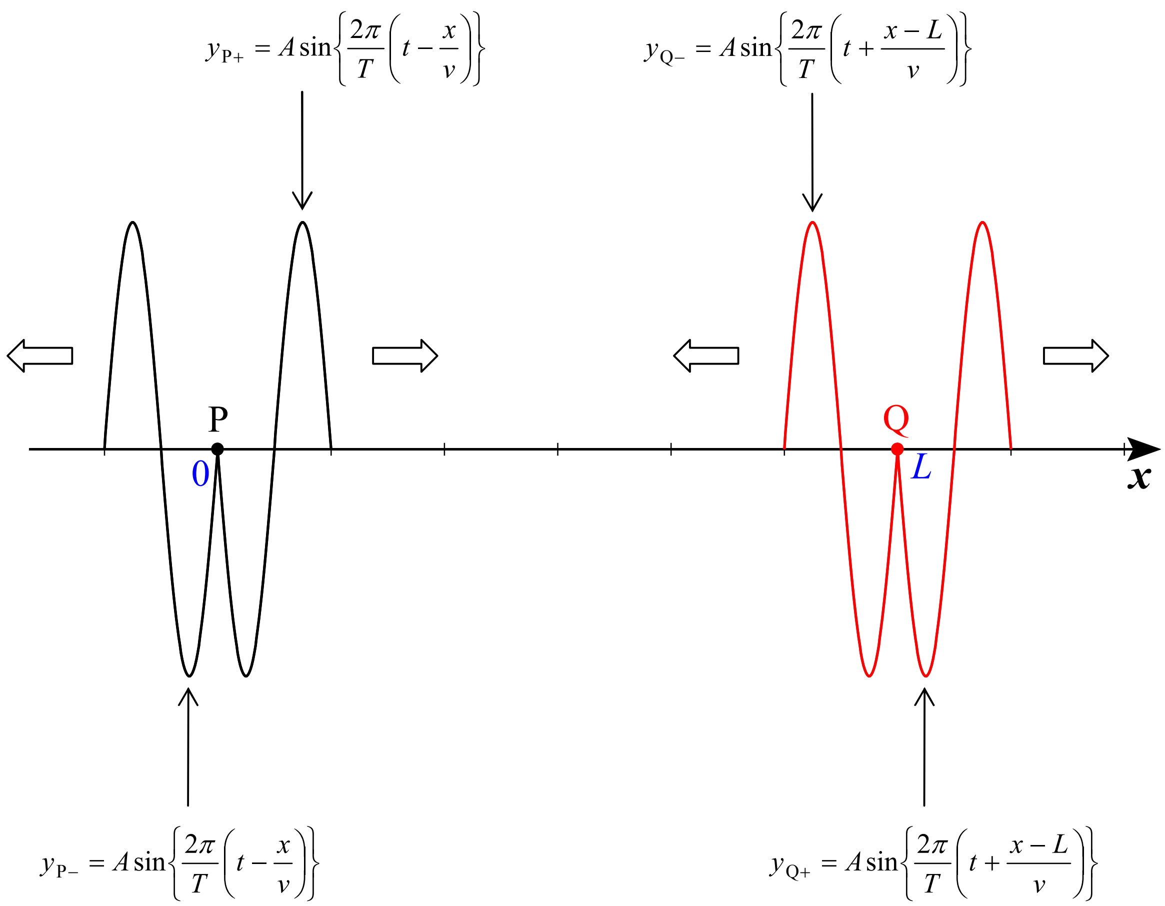
定常波は，互いに逆向きに進む周期の等しい波が干渉し合うことで生じる。

2.　波源からの波の力学的波動関数

同位相で単振動中の波源 P，Q について，波源 P を $x=0$，波源 Q を $x=L$ とする。

また，単振動の初期位相を任意にとっても，波の干渉は同じだから,

簡単のため，初期位相を 0 とする。



波源の振幅を A，単振動の周期を T，波の速さを v とする。

波源 P からの右進行波 y_{p+} の波動関数

$$y_{P+}=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}\quad\cdots①$$

波源 P からの左進行波 y_{p-} の波動関数

$$y_{P-}=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\right)\right\}\quad\cdots②$$

波源 Q からの右進行波 y_{Q+} の波動関数

$y_{P+}=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}$ を x 軸方向に L 平行移動すればよいから，

「$y=f(x)$ を x 方向に p 平行移動すると， $y=f(x-p)$ になる」という知識を使うと，

$$y_{Q+}=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x-L}{v}\right)\right\}\quad\cdots③$$

波源 Q からの左進行波 y_{Q-} の波動関数

$y_{P+}=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\right)\right\}$ を x 軸方向に L 平行移動すればよいから，

「$y=f(x)$ を x 方向に p 平行移動すると， $y=f(x-p)$ になる」という知識を使うと，

$$y_{Q-}=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)\right\}\quad\cdots④$$

3. 波の合成と定常波

3-1. PQ 間の合成波は定常波である

合成波は，波源 P からの右進行波と波源 Q からの左進行波の干渉によるから，

①＋④と三角関数の和積の公式より，

$$\begin{aligned}
Y_{PQ}&=y_{P+}+y_{Q-}\\
&=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}+A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)\right\}\\
&=A\left\{\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)\right\}\\
&=A\cdot 2\sin\left\{\frac{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)}{2}\right\}\cos\left\{\frac{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)-\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)}{2}\right\}\\
&=2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{-2x+L}{2v}\right)\right\}\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{2v}\right)\right\}\\
&=2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2x-L}{2v}\right)\right\}\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{2v}\right)\right\}
\end{aligned}$$

よって，$Y_{\mathrm{PQ}}=2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2x-L}{2v}\right)\right\}\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{2v}\right)\right\}\ (0\leq x\leq L)$

ここで，

$2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2x-L}{2v}\right)\right\}$ は位置 x の関数，すなわち x で決まる値だから，

$\left|2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2x-L}{2v}\right)\right\}\right|$ は位置 x における振幅を意味する。

ゆえに，$Y_{\mathrm{PQ}}=2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2x-L}{2v}\right)\right\}\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{2v}\right)\right\}\ (0\leq x\leq L)$ は，

位置 x における振幅 $\left|2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2x-L}{2v}\right)\right\}\right|$，初期位相 $\frac{2\pi}{T}\left(0-\frac{L}{2v}\right)=\frac{L}{Tv}\pi=\frac{L}{T\cdot\frac{\lambda}{T}}\pi=\frac{L}{\lambda}\pi$

の定常波を表す式である。

PQ の中点は腹になる。

PQ の中点 $x=\frac{L}{2}$ の振幅の大きさは，$\left|2A\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2\cdot\frac{L}{2}-L}{2v}\right)\right|=|2A\cos 0|=2A$

PQ の中点の振幅は最大値 $2A$ をとることより，

波源 P と Q が同位相で単振動しているとき，PQ の中点は腹になる。

補足

波源 P と Q の位相が真逆の場合，PQ の中点は節になる。

$y_{\mathrm{P+}}=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}$ とすると，$y_{\mathrm{Q-}}=-A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)\right\}$ より，

$y_{\mathrm{P+}}+y_{\mathrm{Q-}}=-2A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2x-L}{2v}\right)\right\}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{2v}\right)\right\}$

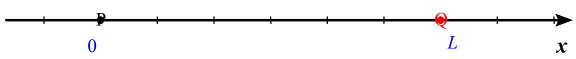
よって，

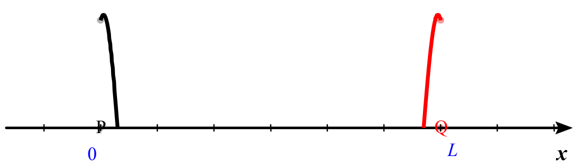
PQ の中点 $x=\frac{L}{2}$ における単振動の振幅 $=\left|2A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2\cdot\frac{L}{2}-L}{2v}\right)\right\}\right|=0$

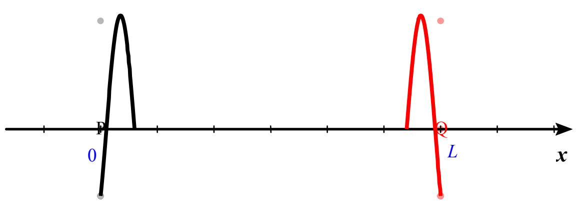
ゆえに，

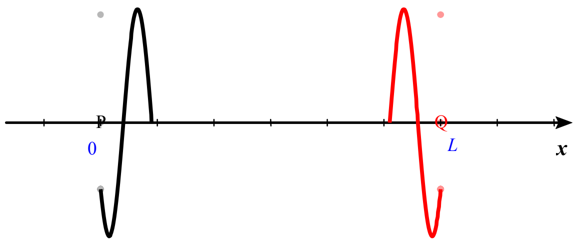
波源 P と Q の位相が真逆の場合，PQ の中点は節になる。

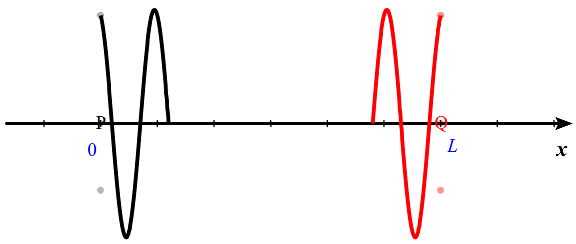
では，定常波ができる様子をコマ送りで見てみましょう。

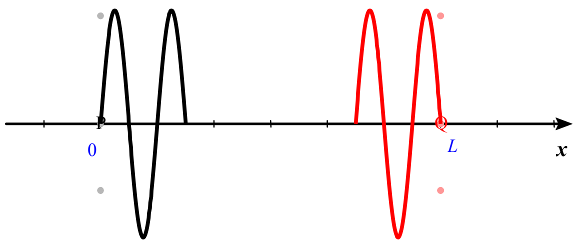


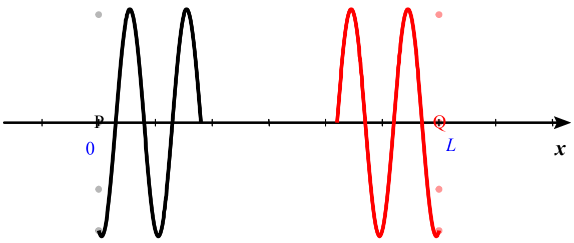


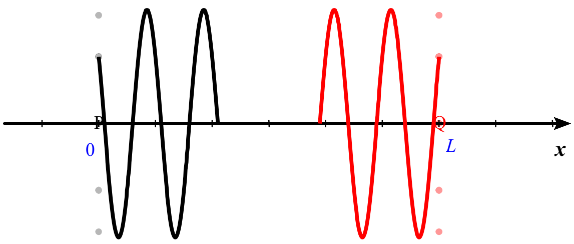


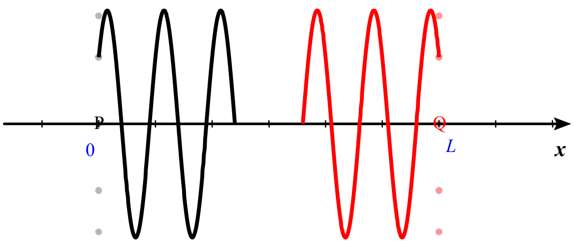

P
0
Q
L
x

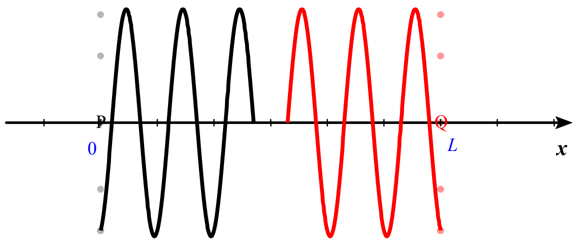

P
0
Q
L
x

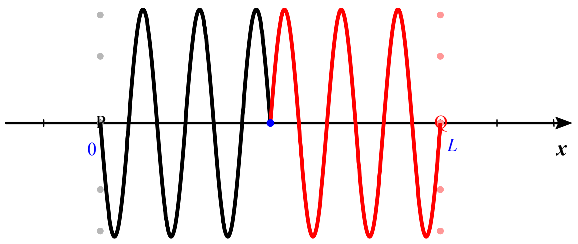

P
0
Q
L
x

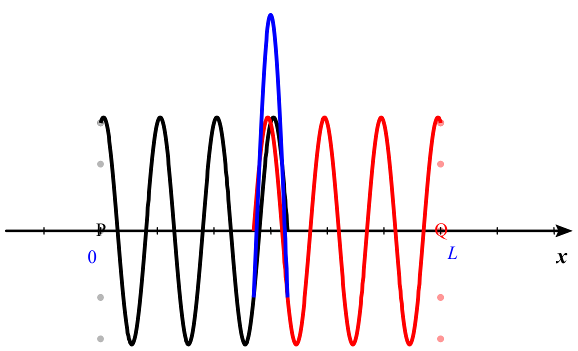

P
0
Q
L
x

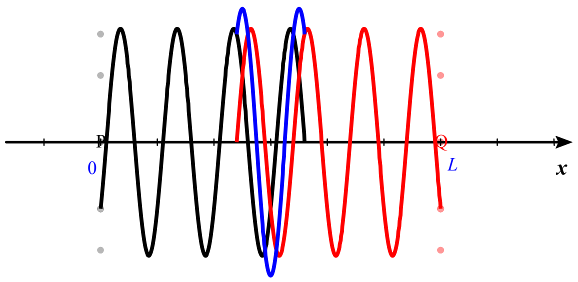

P
0
Q
L
x

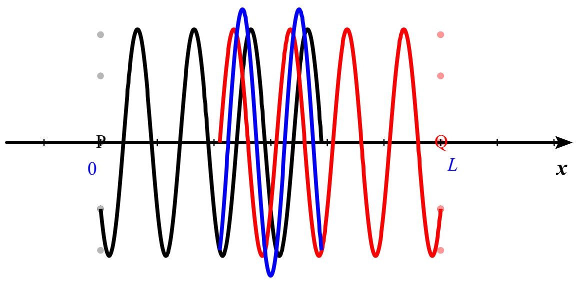

P
0
Q
L
x

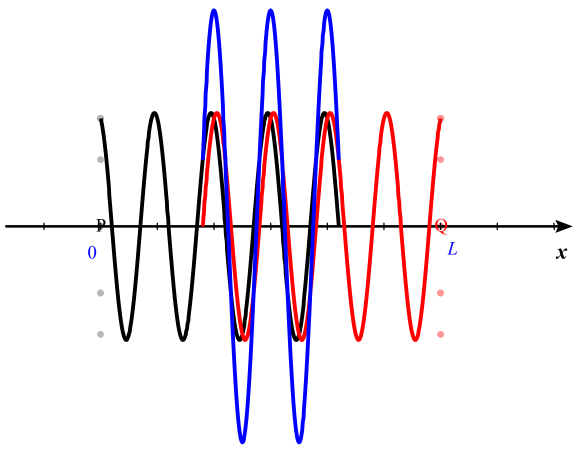

P
0
Q
L
x

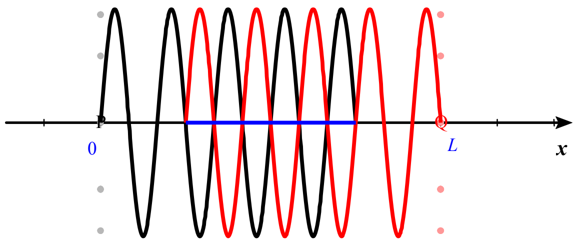

P
0
Q
L
x

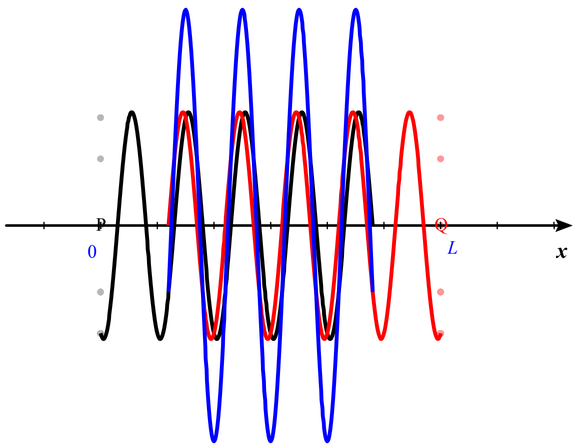

P
0
Q
L
x

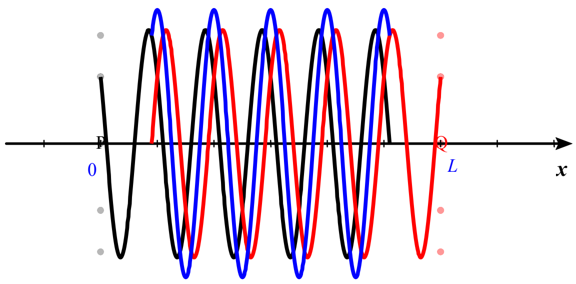

P
0
Q
L
x

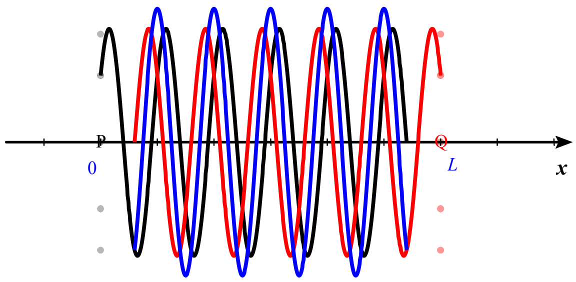

P
0
Q
L
x

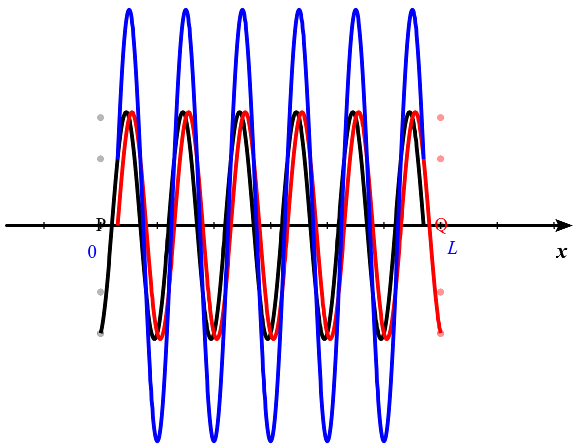

P
0
Q
L
x

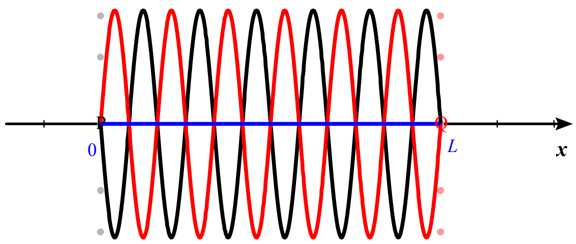

P
0
Q
L
x


P
0
Q
L
x

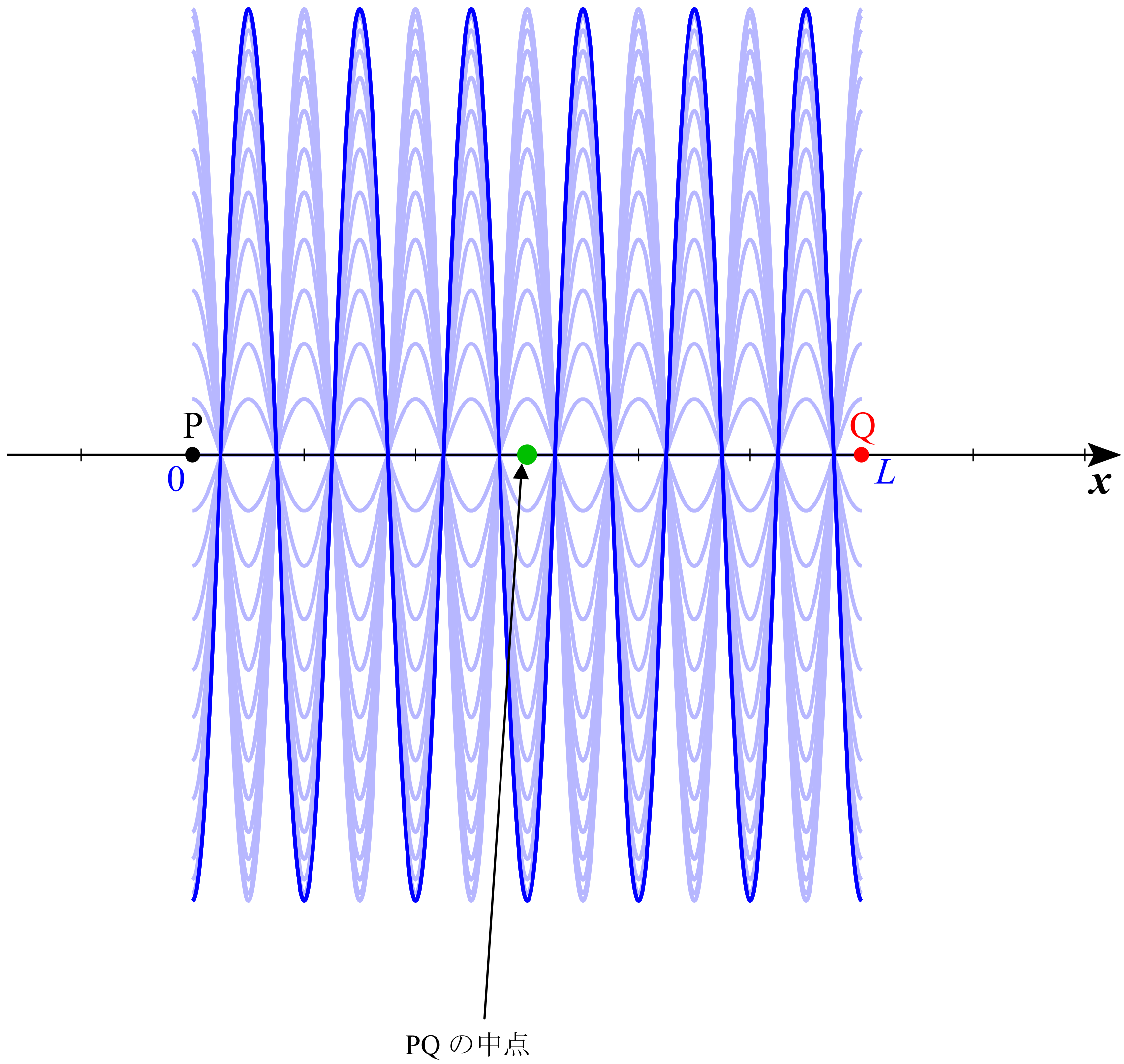

P
0
Q
L
x


P
Q
0
L
x


P
Q
0
L
x


P
Q
0
L
x

次は，定常波のみを残像付きで



3-2. 波源 P の左側（波源 Q の右側）の合成波は定常波ではない

合成波は，波源 P からの左進行波と波源 Q からの左進行波の干渉によるから，

②＋④と三角関数の和積の公式より，

$$\begin{aligned}
y_{\mathrm{P}-}+y_{\mathrm{Q}-} &= \left\{A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\right)\right\}+A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)\right\} \\
&= 2A\cos\left(\frac{L}{Tv}\pi\right)\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{2x-L}{v}\right)\right\} \\
&= 2A\cos\left(\frac{L}{T\cdot\frac{\lambda}{T}}\right)\pi\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{2x-L}{v}\right)\right\} \\
&= 2A\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\right)\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{2x-L}{v}\right)\right\}
\end{aligned}$$

振幅 $=\left|2A\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\right)\right|=$ 一定 だから，この合成波は，定常波ではない。

また，

PQ 間の定常波の波源 P の振幅は，

P の位置が $x=0$ であることより，

定常波の振幅 $=\left|2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{2x-L}{2v}\right)\right\}\right|$ に $x=0$ を代入すると，

$$\left|2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{0-L}{2v}\right)\right\}\right|=\left|2A\cos\left(-\frac{\pi}{T}\cdot\frac{L}{v}\right)\right|=\left|2A\cos\left(\frac{L}{Tv}\pi\right)\right|=\left|2A\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\right)\right|$$

だから，

波源 P の左側の合成波と波源 P の振幅は一致する。

点 P での連続性から考えれば当然のことではあるが・・・

補足

波源 Q の右側の合成波も定常波ではない。

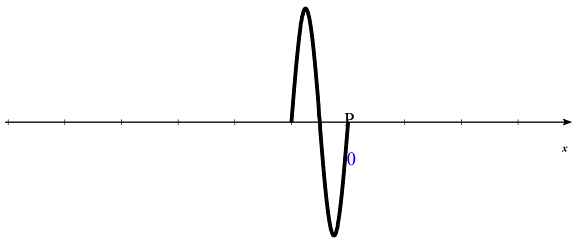
合成波は，波源 P からの右進行波と波源 Q からの右進行波の干渉によるから，

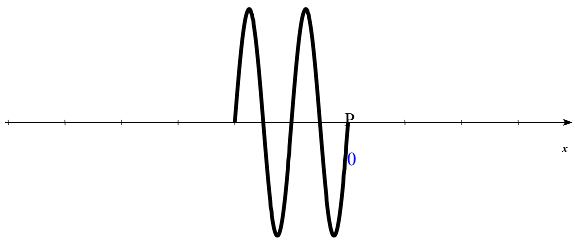
①＋③と三角関数の和積の公式より，

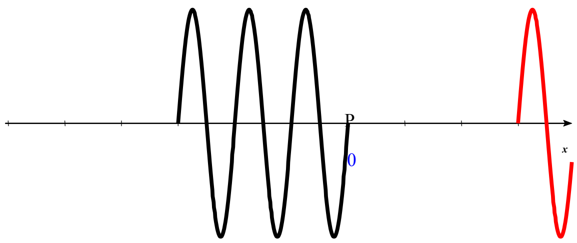
$$\begin{aligned}
y_{\mathrm{P}+}+y_{\mathrm{Q}+} &= \left\{A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}+A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x-L}{v}\right)\right\} \\
&= 2A\cos\left(\frac{L}{\lambda}\pi\right)\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2x-L}{v}\right)\right\}
\end{aligned}$$

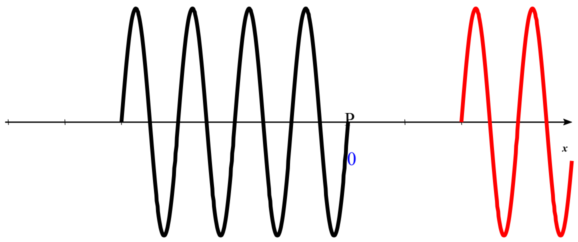
振幅は，定常波の波源 Q の振幅と一致する。

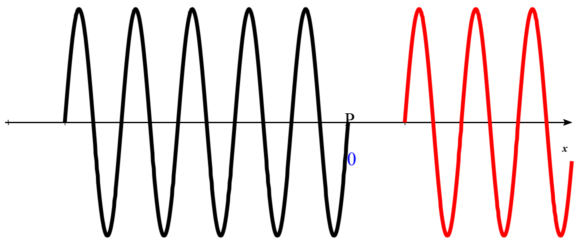
波源 P の左側の合成波をコマ送りで見てみましょう。

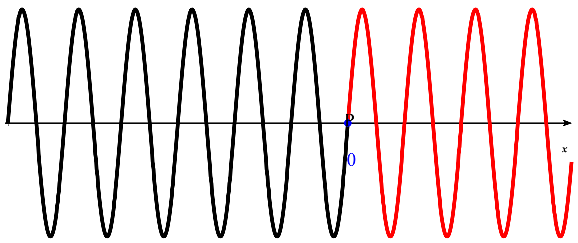


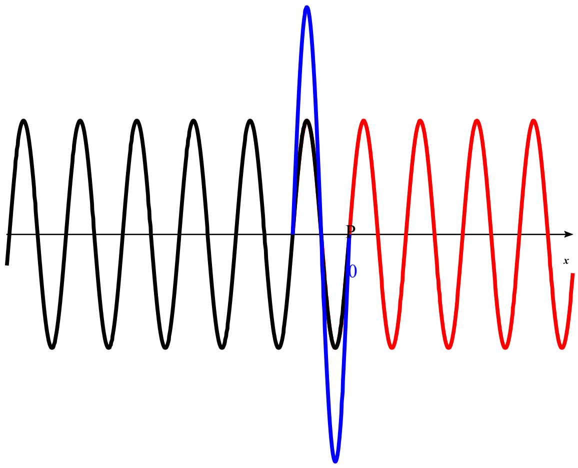


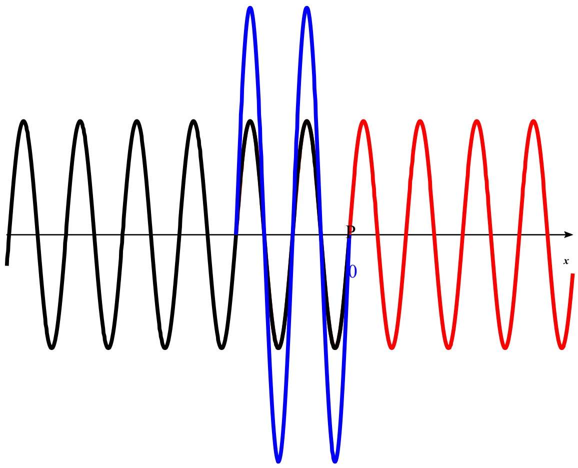


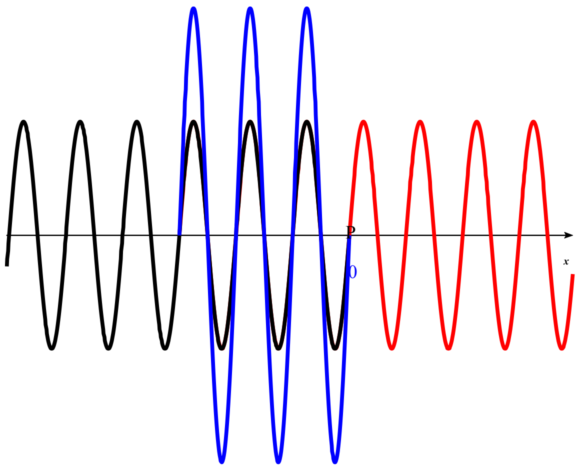

P
0
x


P
0
x


P
0
x


P
0
x


P
0
x


P
0
x

次は，合成波のみを残像付きで