力学的波動関数のつくり方

単振動の式を理解していることを前提に説明します。

力学的波動関数

1. 波動を表すのに必要な 2 つの変数

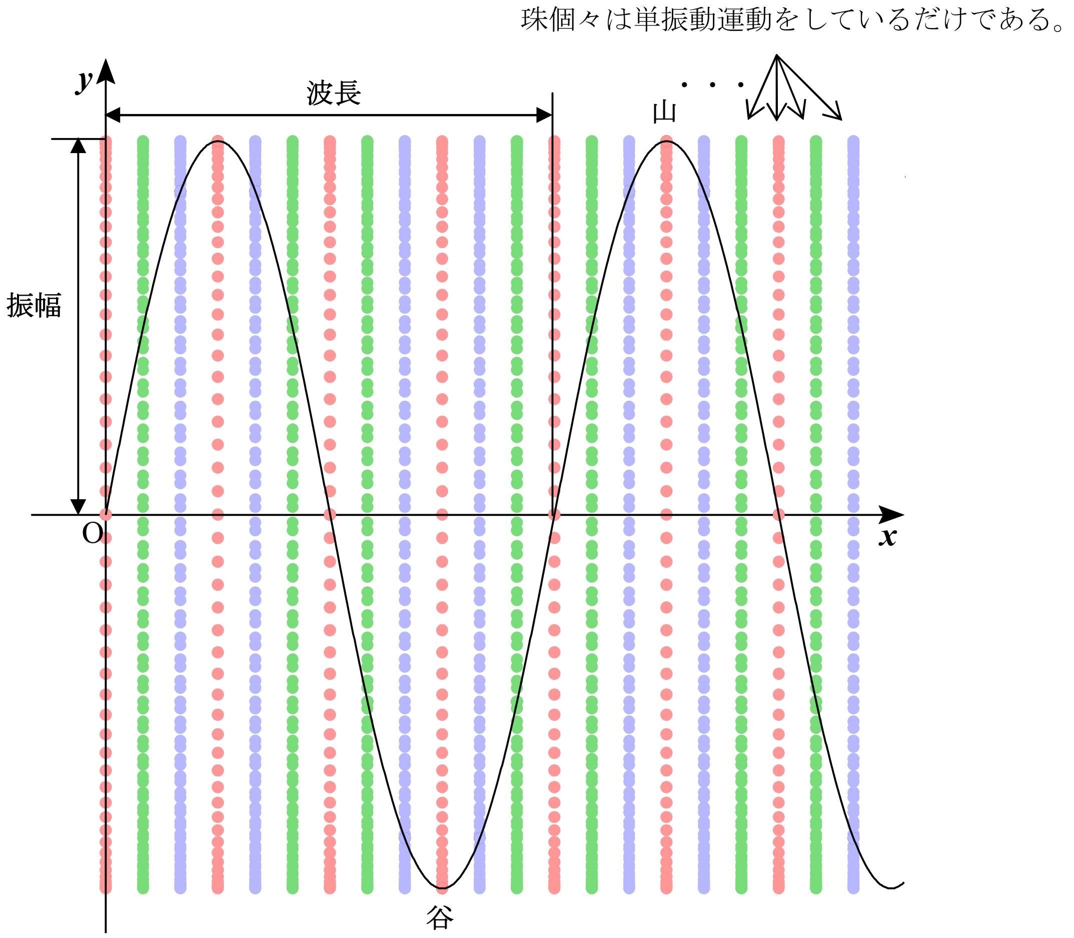
「物理小ネタ」の「力学的波動と光波」の項で説明したように，
力学的波動は，弾性体を構成する粒子の変位が伝わる現象である。
弾性体を構成する個々の粒子に注目すると，
各粒子はその場で, 波の進行方向に対し, 垂直または平行方向に単振動しているだけだから,
各粒子の変位 y は，時刻 t の三角関数（sin または cos）で表せる。
一方，粒子全体，すなわちマクロのレベルで観察すると，横波または縦波の波形が見える。
つまり，同時刻における各位置の粒子の変位が周期的に変化するのが見える。
したがって，位置 x を横軸に，変位 y を縦軸にとると，
ある瞬間における横波の波形は，位置 x の三角関数（sin または cos）で表せる。
縦波についても，ルール（右方向の変位を縦軸の正の向きとする）に従い，
横波で表現すれば，横波と同様，位置 x の三角関数（sin または cos）で表せる。
以上より，1 個の粒子だけの単振動ならば，時刻 t の関数で表せば済むが，
全粒子の単振動を 1 つの単振動の式にまとめるとなると，位置 x も含めた単振動の式,
つまり，時刻 t と位置 x を変数とする単振動の式が必要になる。
これが力学的波動関数 $y=f(x,t)$ である。

補足

$x=x_1$ とすると，
　位置 x_1 における単振動の式 $y=f(x_1,t)$ が得られ，
$t=t_1$ とすると，
　時刻 t_1 における各位置の変位，すなわち波形の式 $y=f(x,t_1)$ が得られる。
変位を z 軸, 位置を x 軸, 時刻を y 軸とする空間座標をとると, 立体的な波形が得られる。

2. 波長・周期・振幅

わかりやすくするため，数珠つながりの珠の右端を固定し，
左端の珠を手で上下させ横波をつくる場合について考えよう。
ここで，左端の珠から順に 1,2,3,・・・と番号をつけると，
1 番珠を上に引き上げると，2 番珠も珠間の張力で引き上げられるが，
慣性により静止し続けようとするため，1 番珠より少し遅れて引き上げられる。
同様に，2 番珠が引き上げられると，続いて，その隣の 3 番珠が引き上げられ始める。
こうして，1 番珠の変位が，次々とおくれて右の珠へと伝えられていき，
1 番珠を上下に 1 往復させると，1 つの波形が現れる。



周期（T）: 上下 1 往復（単振動 1 回あたり）の時間

振動数（f）: 1 秒あたりの振動回数で，周期の逆数。すなわち $f=\dfrac{1}{T}$

波長（λ）: 任意の点における 1 回の単振動（1 周期）の変位が伝わる距離

振幅：振動中心を基準位置としたときの変位の大きさの最大値

山：変位が最大となる点

谷：変位が最小となる点

3. 波の速さ（変位の伝わる速さ）v

周期 T は 1 回の振動にかかる時間だから，振動数 $f=\dfrac{1}{T}$ の関係がなりたつ。

1 回の振動（周期 T）の間に変位（波）は λ 先まで伝わることと，
1 秒あたりの振動回数（振動数 f）であることから，

波が伝わる速さ（変位が伝わる速さ）$v=f\lambda$ または $v=\dfrac{\lambda}{T}$ と表される。

波が伝わる速さ（変位が伝わる速さ）を，通常，「波の速さ」という。

力学的波動関数 $y=f(x,t)$ のつくり方

1．位置の単位 *x*[m]および時刻の単位 *t*[s]の弧度[rad]への変換

f は位置 x と時刻 t の 2 変数の正弦または余弦関数であるから，

位置 x [m]と時刻 t [s]を，それぞれ対応する弧度[rad]に変換しなければならない。

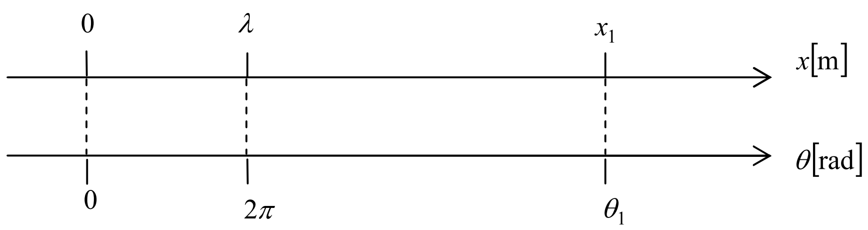
位置 x [m]の弧度[rad]への変換

位置 x [m]にあたる弧度を θ [rad]とすると，

波形から，波長 λ [m]にあたる弧度は 2π [rad]であることより，

$$\frac{\theta}{x}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore \theta=\frac{2\pi}{\lambda}x$$



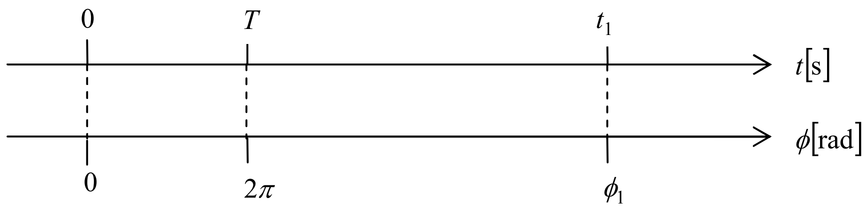
時刻 t [s]の弧度 [rad]への変換

時刻 t [s]にあたる弧度を ϕ [rad]とすると，

単振動の周期性から，周期 T [s]にあたる弧度は 2π [rad]であることより，

$$\frac{\phi}{t}=\frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore \phi=\frac{2\pi}{T}t \text{ または } \phi=\omega t \quad \left(\because \omega=\frac{2\pi}{T}\right)$$



2．$x=0$ における単振動の式から力学的波動関数 $y=f(x,t)$ へ

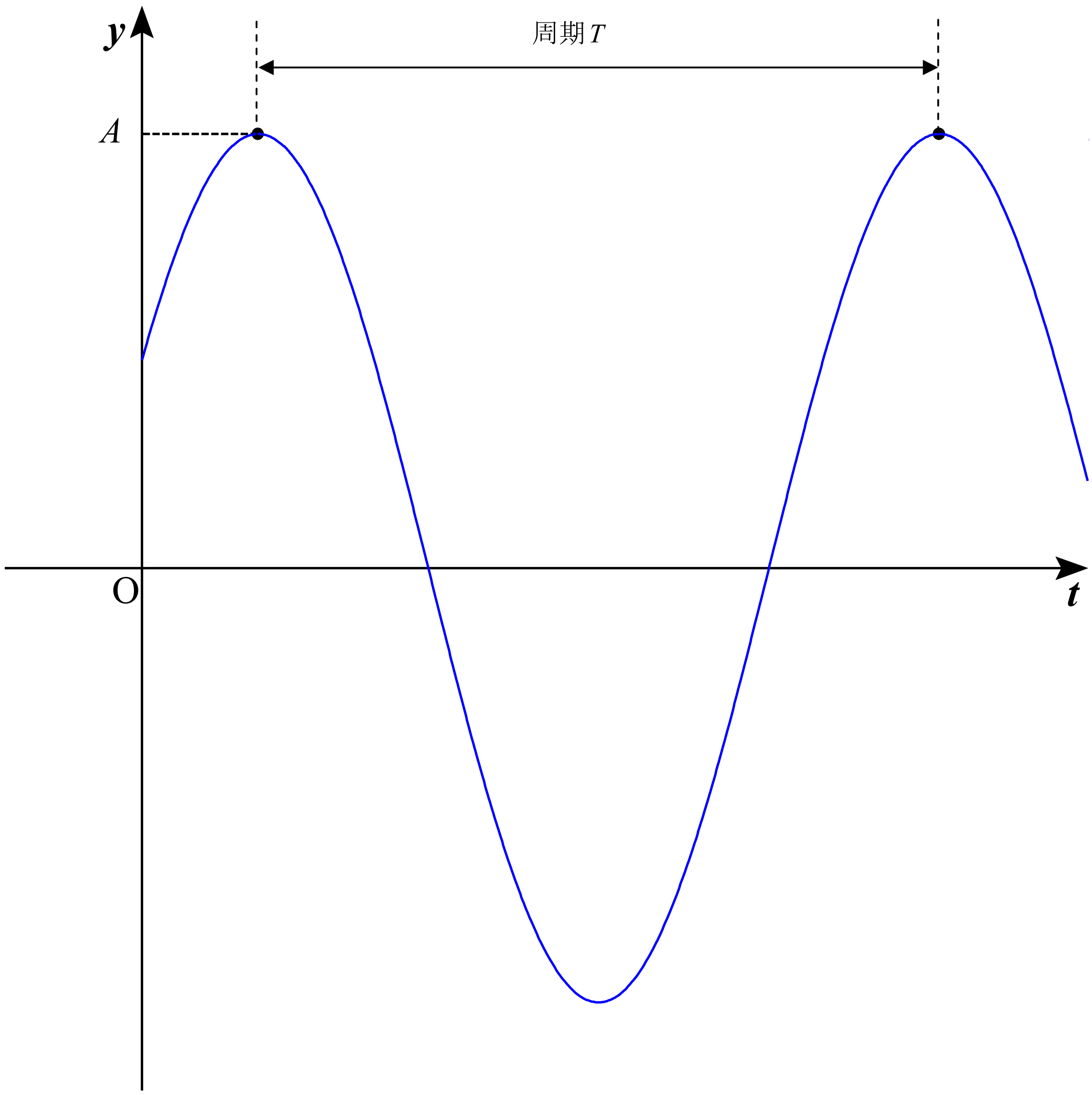
位置 x，時刻 t の変位を $y_{(x,t)}$ とする。

$x=0$ における単振動が，振幅 A，初期位相（$t=0$ のときの位相）α [rad]，周期 T の場合

$x=0$ における変位は，

$$y_{(0,t)}=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\alpha\right)\quad\cdot\cdot\cdot①$$

と表せる。



次に，$y_{(0,t)} = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$ から，任意の位置 x における時刻 t の変位 $y_{(x,t)}$ を求めよう。

ここで，$x = 0$ における変位（波）が x 軸正方向に速さ v で伝わるとする。
（x 軸正方向は，通常，右向きだから，これを「右進行波」とする）

すると，$x = 0$ における時刻 t の変位が位置 x に到着する時刻 $t' = t + \dfrac{x}{v}$ となる。

よって，$t = t' - \dfrac{x}{v}$

これを①に代入すると，

$$y_{(x,t')} = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t' - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right\}$$

t' を t に書き改め，体裁を整えると，
任意の位置 x における時刻 t の変位の式，
つまり

右進行波の波動関数は，$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t - \dfrac{x}{v}\right) + \alpha\right\}$ ・・・②

となる。

要するに，$y_{(0,t)} = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$ を x 方向に $+\dfrac{x}{v}$ 平行移動しただけである。

また，これより，

左進行波の波動関数は，$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t + \dfrac{x}{v}\right) + \alpha\right\}$ ・・・③

となる。

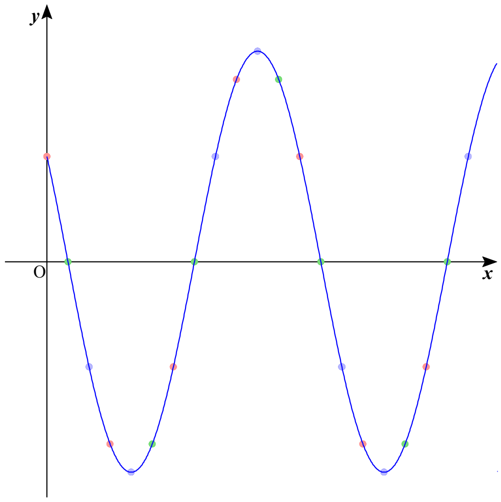
（
あるいは，

$\dfrac{2\pi}{T} = \omega$ より，

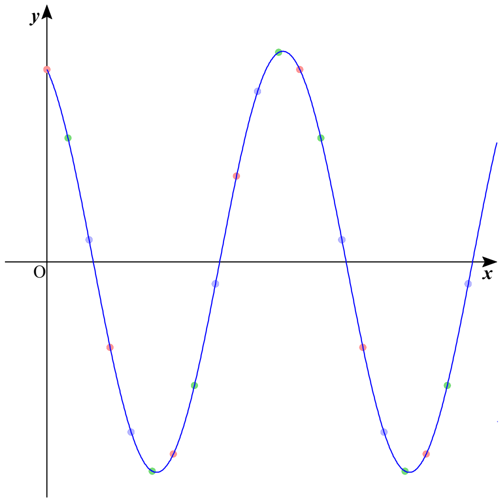
右進行波：$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\omega \cdot \left(t - \dfrac{x}{v}\right) + \alpha\right\}$

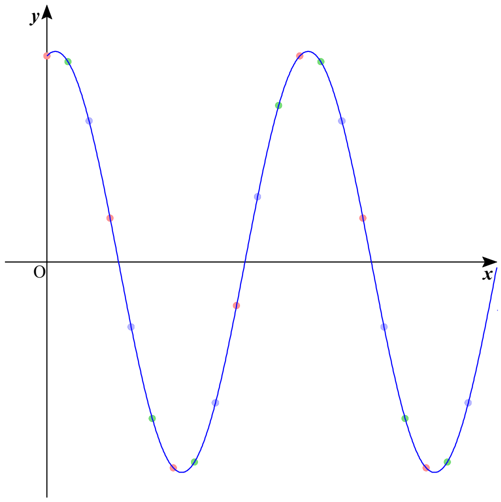
左進行波：$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\omega \cdot \left(t + \dfrac{x}{v}\right) + \alpha\right\}$
）

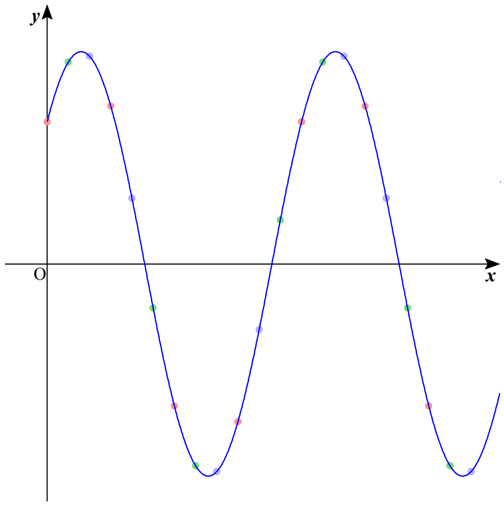
式②（右進行波）の波形の，時刻 t=0 からの，経時変化

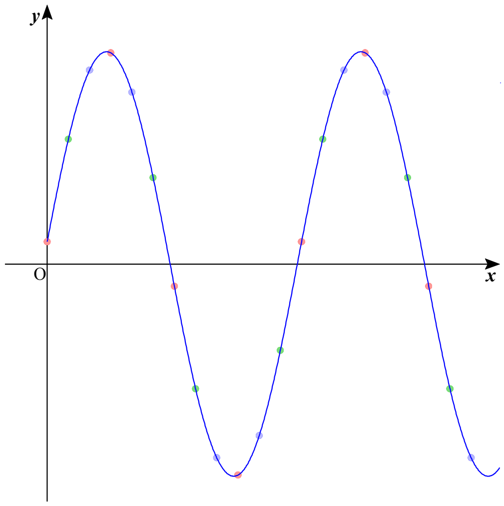


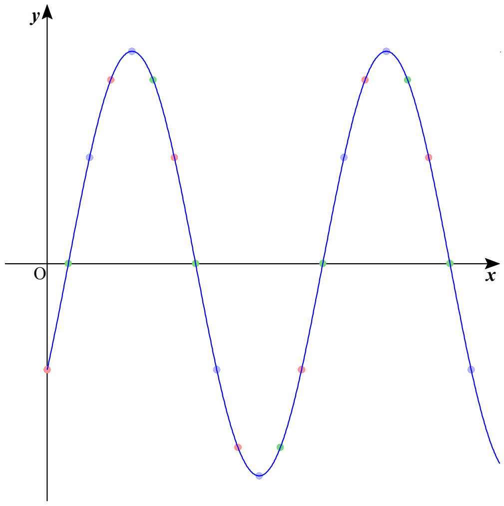
⇨ 波の進行方向

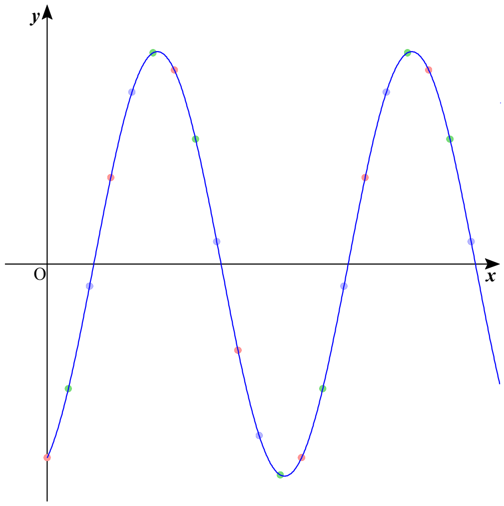


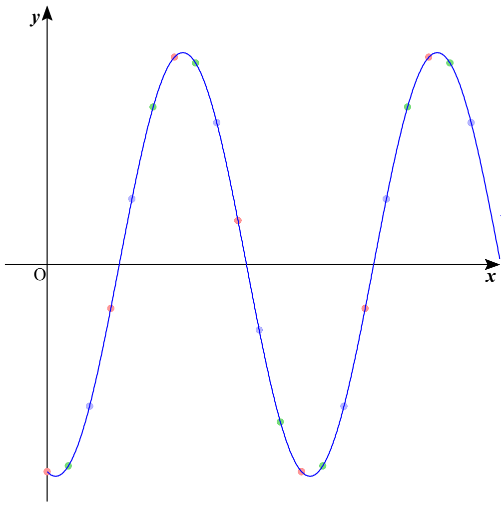


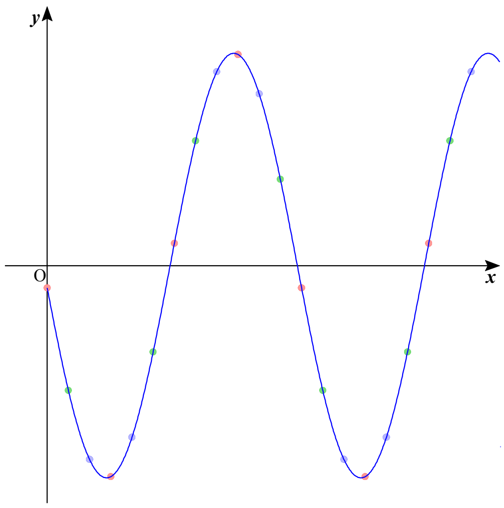

y
O
x

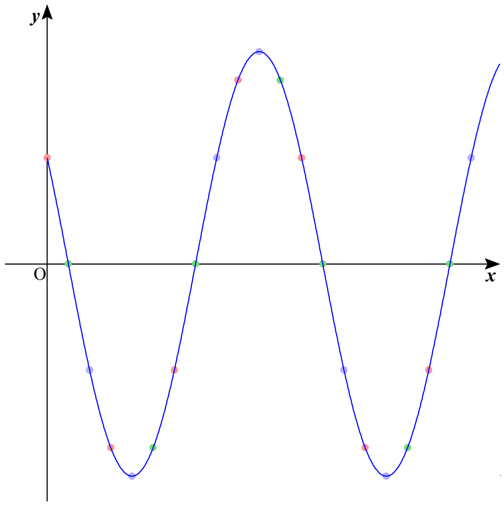

y
O
x


y
O
x

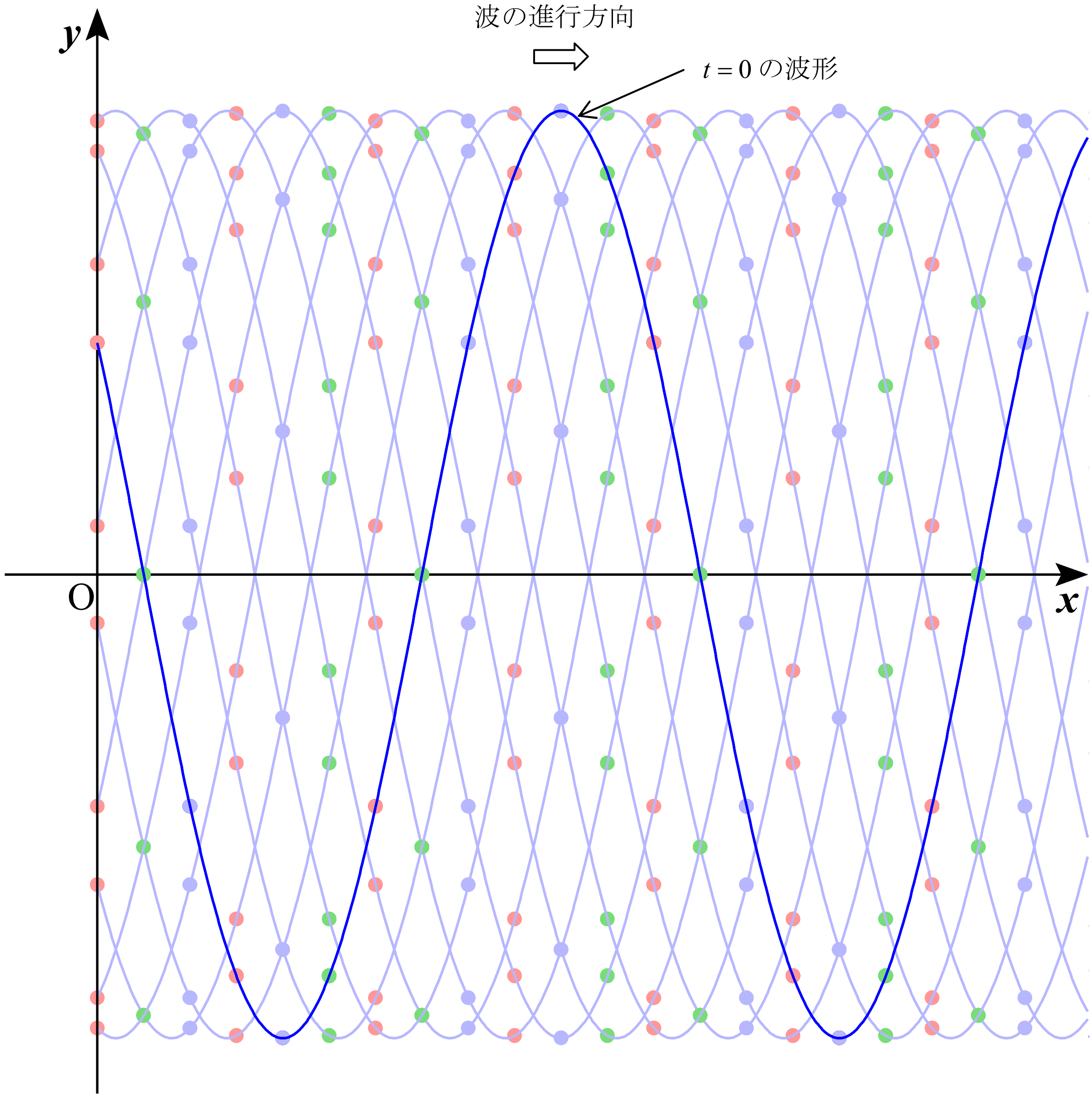

y
O
x


y
O
x

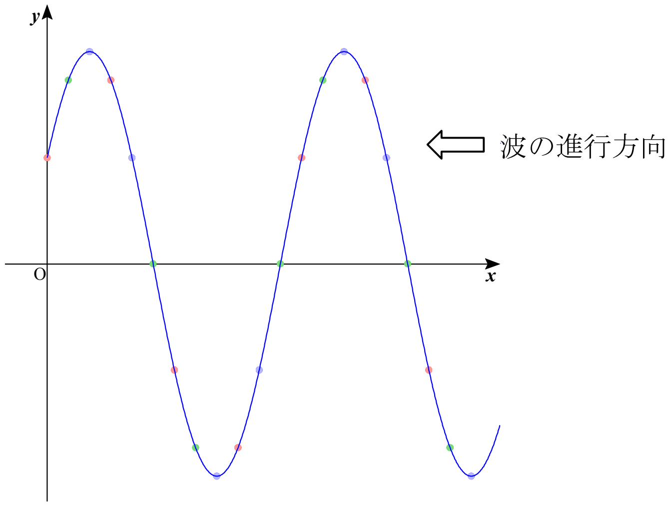

y
O
x

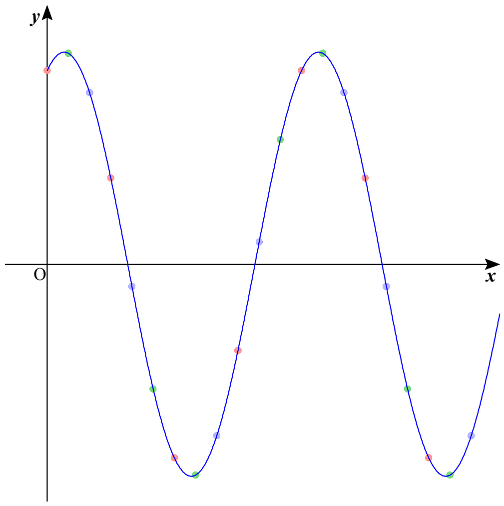


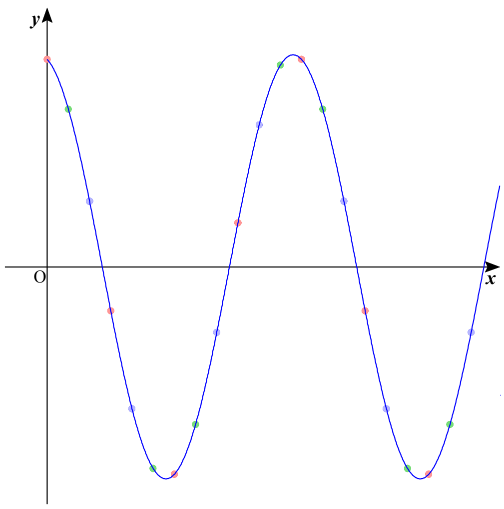
まとめると，

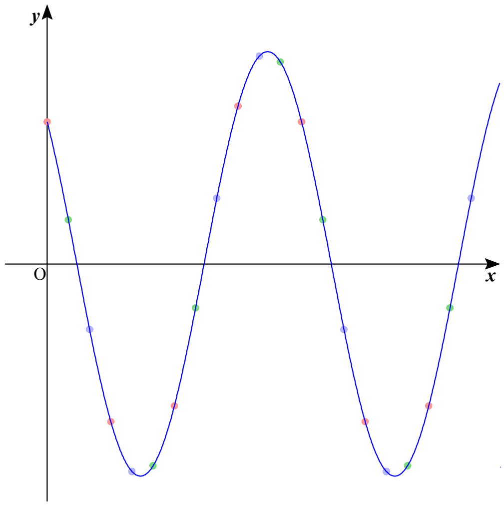


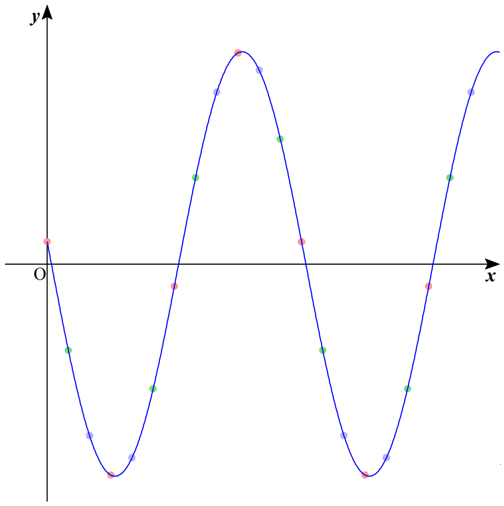
式③（左進行波）の波形の，時刻 t=**0** からの，経時変化

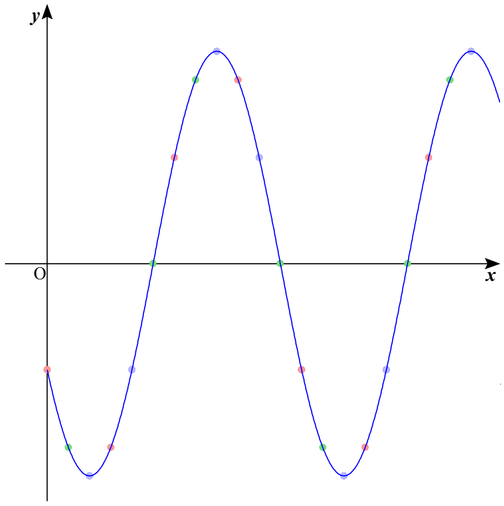


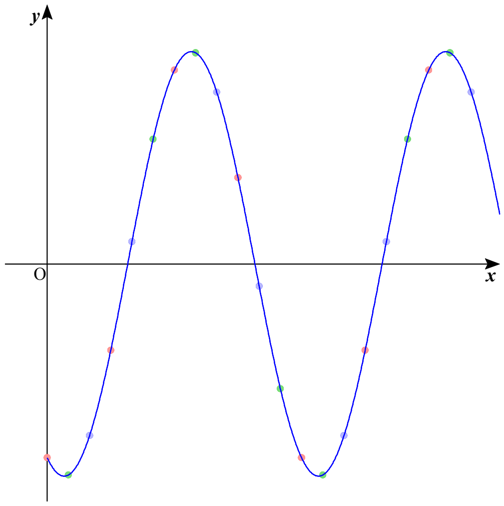


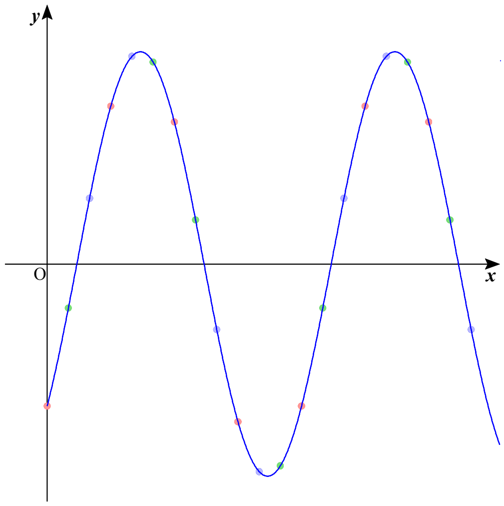


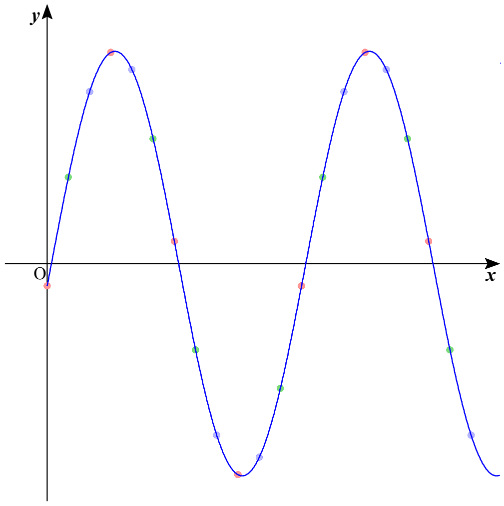

y
O
x

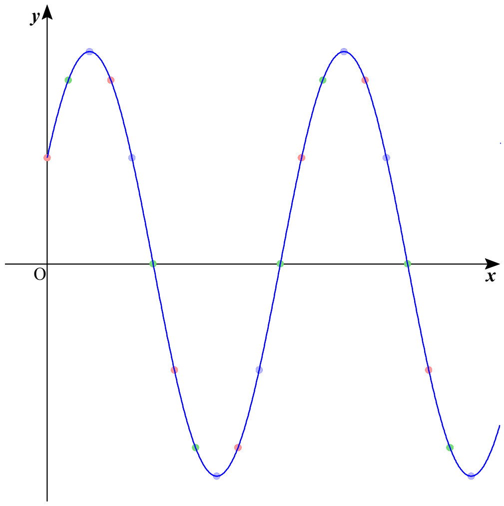

y
O
x


y
O
x

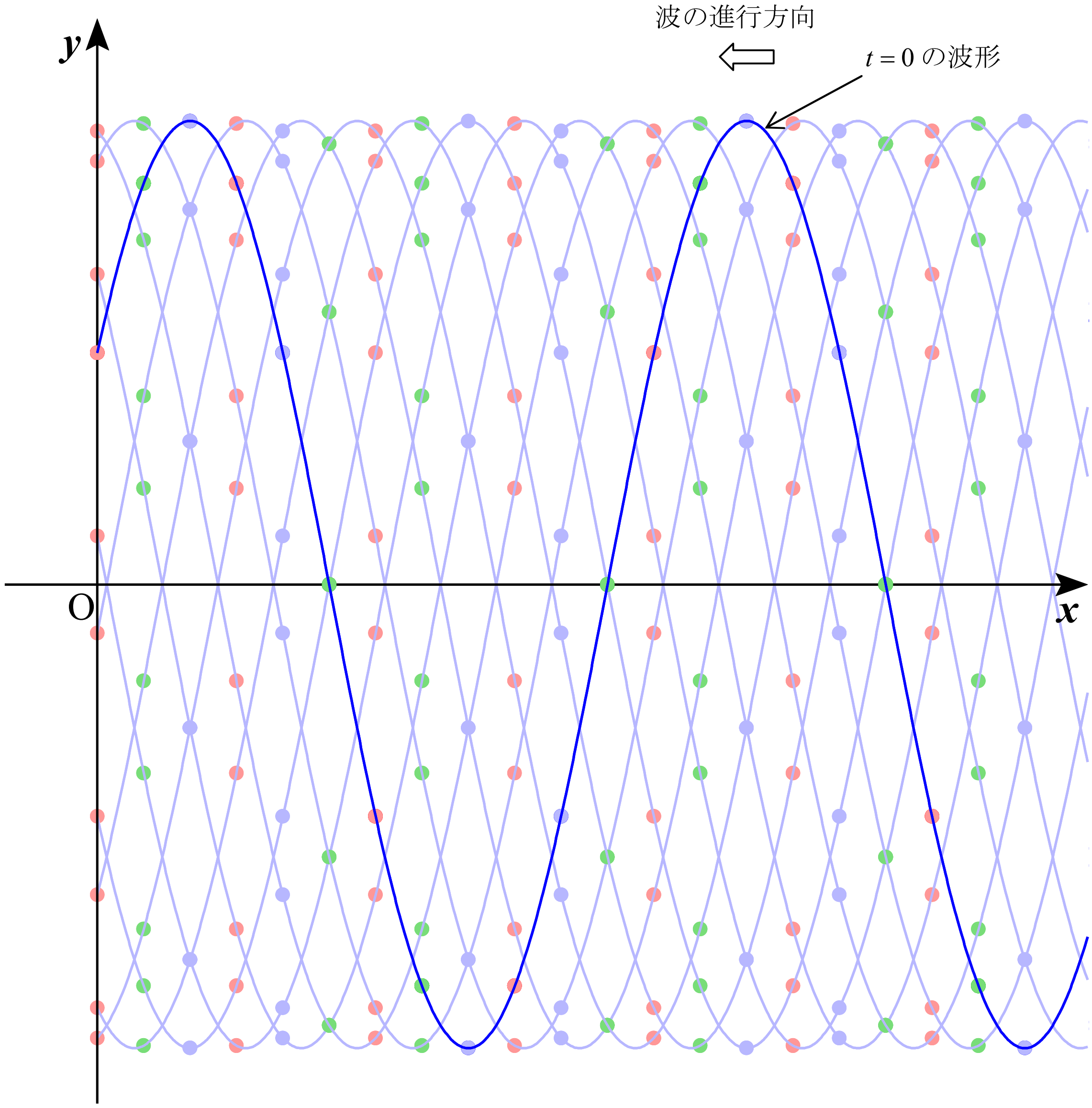

y
O
x


y
O
x


y
O
x



まとめると



3. $t=0$ における単振動の式から力学的波動関数 $y=f(x,t)$へ

x 軸正方向に速さ v で伝わる波（右進行波）について,
次ページの時刻 $t=0$ の波形（黒色実線）とその t 秒後の波形（赤色実線）について考える。
$x=0$， $t=0$ における位相を β とすると,
$t=0$ のときの波形は,

$$y_{(x,0)} = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\beta\right) \quad ・・・④$$

と表せる。
任意の位置の変位は， t 秒後には，右方向に距離 vt 離れた位置まで伝わっているから,
これを全体, すなわち波形で見ると, $t=0$ の波形が右方向に vt 移動していることになる。
つまり，波形が x 方向に vt だけ平行移動したことになる。
ここで， $t=0$ のときの任意の位置を x，平行移動した位置を x' とすると,
$x'=x+vt$ より， $x=x'-vt$
これを④に代入すると,

$$y_{(x',t)} = A\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x'-vt)+\beta\right\}$$

x' を x に書き改め，体裁を整えると,
任意の位置 x における時刻 t の変位の式,

$$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)+\beta\right\} \quad ・・・⑤$$

が得られる。

補足
「 $y=f(x)$ を x 方向に p 平行移動すると， $y=f(x-p)$ になる」という知識を使えば,
$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)+\beta\right\}$ が簡単に得られる。

これと， $\lambda=vT$ より,

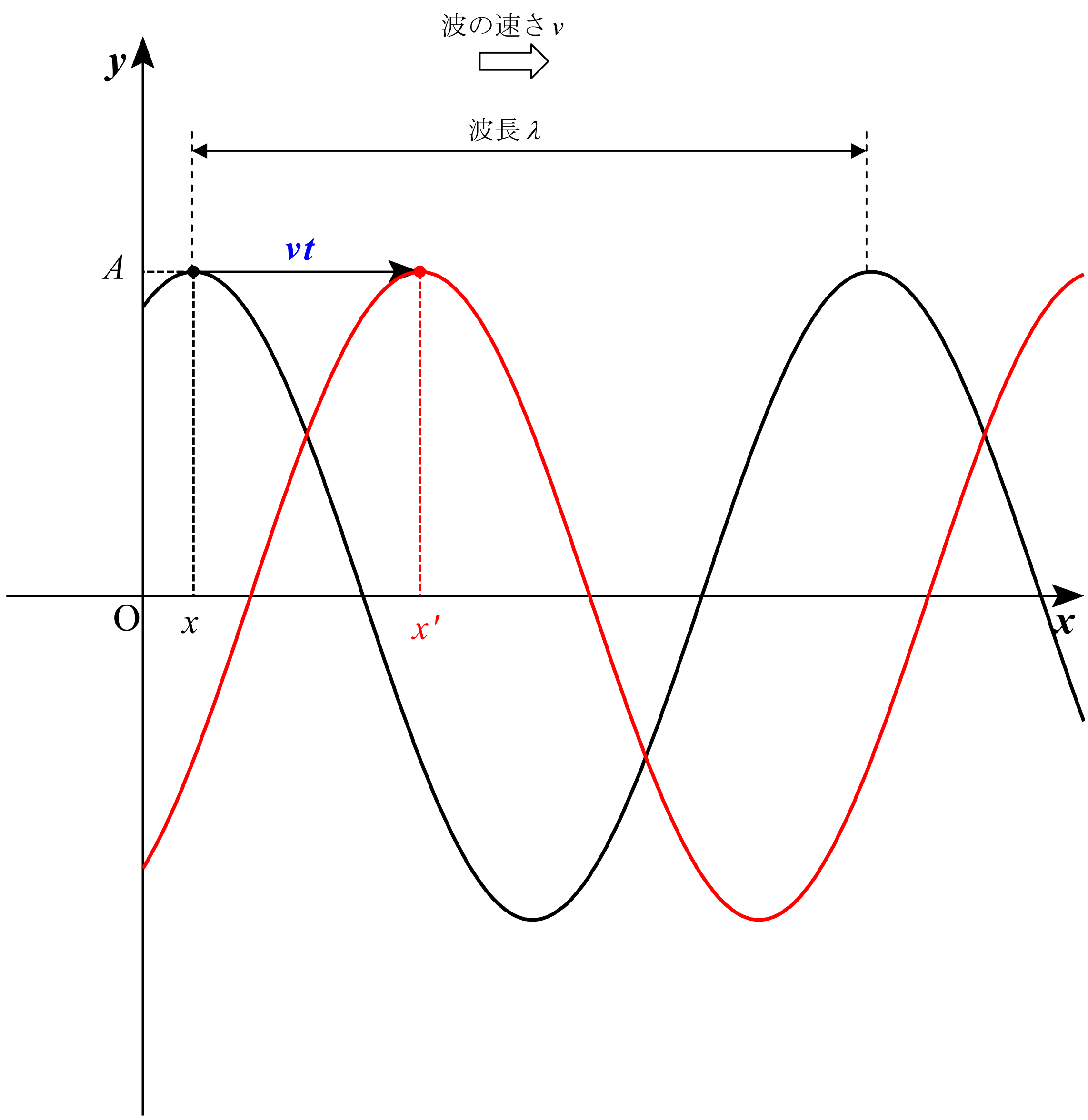
$$\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)+\beta=\frac{2\pi}{vT}(x-vt)+\beta=-\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\beta$$ だから,

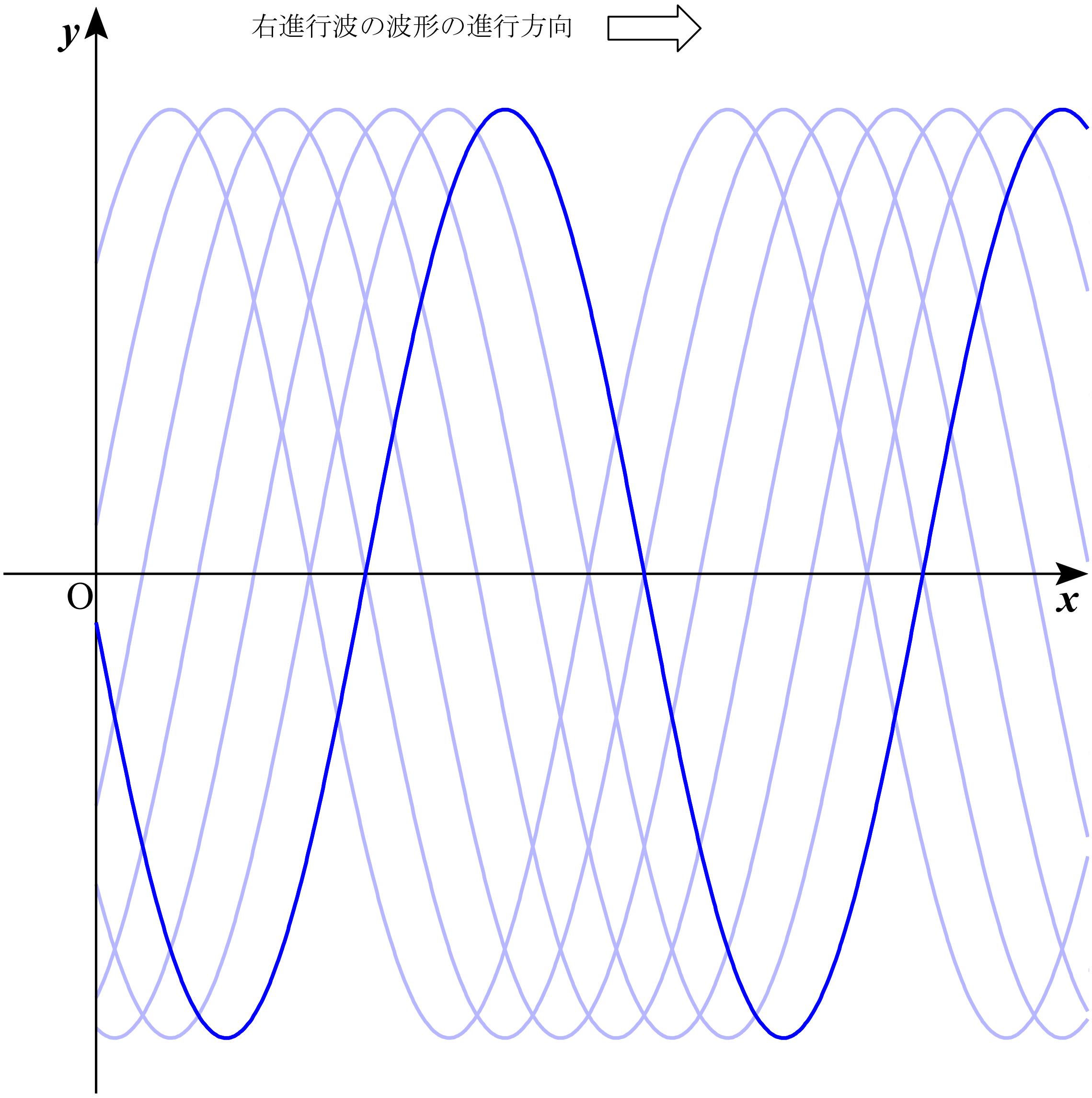
右進行波の波動関数の式⑤は,

$$y_{(x,t)} = -A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\beta\right\}$$

となる。
これより，この場合の左進行波の波動関数は,

$$y_{(x,t)} = -A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\right)+\beta\right\}$$


波の速さ v
波長 λ
y
A
vt
O
x
x′
x


右進行波の波形の進行方向
y
O
x

4. まとめ：力学的波動関数の一般形

振幅A，周期T，波の速度v，初期位相αの力学的波動関数の一般形は,

$$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right\} \text{ または } y_{(x,t)} = A\sin\left\{\omega\cdot\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right\}$$

あるいは,

振幅A，周期T，波の速さ$|v|$，初期位相αの力学的波動関数の一般形は,

右進行波（波の進向きが正）の場合

$$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{|v|}\right)+\alpha\right\} \text{ または } y_{(x,t)} = A\sin\left\{\omega\cdot\left(t-\frac{x}{|v|}\right)+\alpha\right\}$$

左進行波（波の進向きが負）の場合

$$y_{(x,t)} = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{|v|}\right)+\alpha\right\} \text{ または } y_{(x,t)} = A\sin\left\{\omega\cdot\left(t+\frac{x}{|v|}\right)+\alpha\right\}$$

波長λを知りたいときは，t を固定し，たとえば$t=0$とし，$y_{(x,0)}$から,

周期Tを知りたいときは，xを固定し，たとえば$x=0$とし，$y_{(0,t)}$から求めればよい。

初期位相αを知りたいときは，$x=0$，$t=0$とし，$y_{(0,0)} = A\sin\alpha$から求めればよい。

また,

$v = f\lambda = \dfrac{\lambda}{T}$や$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$の関係を用いれば,

これらの力学的波動関数を，使用目的に合った形に変形することができる。