108　漸化式と極限

（ⅰ）

「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow x = f(x)$ は実数 α を解にもつ」の真偽について

$a_{n+1} = f(a_n)$ より，$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$　・・・①

また，

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$　・・・②

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(\alpha)$　・・・③

①，②，③より，$\alpha = f(\alpha)$

よって，「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow x = f(x)$ は α を解にもつ」は真である。

（ⅱ）

「$x = f(x)$ が実数 α を解にもつ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」の真偽について

反例

$f(a_n) = 2a_n$ とすると，$a_{n+1} = 2a_n$

ここで，$a_1 = 1$ とおくと，$a_n = 2^{n-1}$

よって，

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　・・・③

一方，

$f(a_n) = 2a_n$ より，$f(x) = 2x$ だから，

$x = f(x)$ の解 α とは，$x = 2x$ の解のことである。

よって，$\alpha = 0$　・・・④

③，④より，

「$x = f(x)$ が α を解にもつ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」は偽である。

（ⅰ），（ⅱ）より，

$x = f(x)$ が実数 α を解にもつことは $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるための必要条件である。