112　分数漸化式と極限

分数形の漸化式の一般解の求め方

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の一般項の求め方（入試問題では，誘導がついているのがふつうである）

方法 1

置き換えにより，分数漸化式の基本形 $\boldsymbol{b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}}$ を得てから解く。

求め方の手順

手順 1

$a_n=b_n+x$ とおいて，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形になるような x の値を求める。

$b_{n+1}+x=\dfrac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}$ より，$b_{n+1}=\dfrac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}-x$

$\therefore b_{n+1}=\dfrac{(p-rx)b_n-\{rx^2-(p-s)x+q\}}{rb_n+rx+s}$

ここで，$rx^2-(p-s)x+q=0$ の解を α とすると，$b_{n+1}=\dfrac{(p-r\alpha)b_n}{rb_n+r\alpha+s}$

尚，$rx^2-(p-s)x+q=0$ の解は,

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から求めることができる。

その理由については後述。

手順 2

$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形，つまり $b_{n+1}=\dfrac{(p-r\alpha)b_n}{rb_n+r\alpha+s}$ が得られた。

逆数をとると，$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{rb_n+r\alpha+s}{(p-r\alpha)b_n}$ より，

数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ の漸化式 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{r\alpha+s}{p-r\alpha}\cdot\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{r}{p-r\alpha}$ が得られる。

手順 3

$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{r\alpha+s}{p-r\alpha}\cdot\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{r}{p-r\alpha}$ を解くことで，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ の一般項を得,

その逆数をとることにより，数列 $\{b_n\}$ の一般項を得る。

手順 4

数列 $\{a_n\}$ は，$a_n=b_n+\alpha$ を計算することで得られる。

例 1：x の方程式が重解の場合

$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}$，$a_1=1$，$(n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を先ほどの手順に従って求めてみる。

$a_n=b_n+x$ とすると，$b_{n+1}+x=\dfrac{5(b_n+x)-16}{b_n+x-3}$ より，

$b_{n+1}=\dfrac{5(b_n+x)-16}{b_n+x-3}-x \qquad \therefore b_{n+1}=\dfrac{(5-x)b_n-(x-4)^2}{b_n+x-3}$

ここで，$x=4$ とすると，$b_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_n+1} \qquad \therefore \dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+1 \qquad \therefore \dfrac{1}{b_{n+1}}-\dfrac{1}{b_n}=1$

これは，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ が公差 1，初項 $b_1=a_1-4=5-4=1 \ (\because a_1=b_1+4)$

よって，$\dfrac{1}{b_n}=n \qquad \therefore b_n=\dfrac{1}{n} \ (n=1,2,3,\cdots)$

$a_n=b_n+4$ より，$a_n=\dfrac{1}{n}+4 \ (n=1,2,3,\cdots)$

$a_n=b_n+x$ とおいたとき，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形にできるような x が，

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいて得られる方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解である理由

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}&=\frac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}-x\\
&=\frac{pb_n+px+q}{rb_n+rx+s}-x\\
&=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}-x\\
&=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}-x\left(\dfrac{rb_n}{rx+s}+1\right)}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}\\
&=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}-\dfrac{rxb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}-x}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}
\end{aligned}
$$

となるから，$\dfrac{px+q}{rx+s}-x=0$ となる x を求めればよいわけだが，

この方程式は，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおくことで得られる方程式

$x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ と同じである。

よって，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形が得られるような x を求めるには，

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいて得られる x の方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ を解けばよい。

補足

$x=\alpha$ のとき，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ になるとすると，

$b_n=a_n-\alpha$ より，$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{B(a_n-\alpha)+C}$ だから，

これから直接数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてもよい。

例 2：x の方程式が異なる 2 実数解の場合

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}$ $(n=1,2,\cdots)$ の一般項 a_n

解

$a_n=b_n+x$ とおき，特性方程式 $x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ の解を求めると，$x^2-6x+8=0$ $\therefore x=2,4$

解法 1

$a_n=b_n+2$ とおくと，

$$b_{n+1}+2=\frac{-(b_n+2)+8}{-(b_n+2)+5}$$
$$=\frac{-b_n+6}{-b_n+3}$$
$$=\frac{2(-b_n+3)+b_n}{-b_n+3}$$
$$=2+\frac{b_n}{-b_n+3}$$

$$\therefore b_{n+1}=\frac{b_n}{-b_n+3}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}}=-1+\frac{3}{b_n}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{2}=3\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{b_n}-\frac{1}{2}=3^{n-1}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{2}\right)=3^{n-1}\left(\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{2}\right)=3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{b_n}=\frac{3^{n-1}+1}{2}$$

$$\therefore a_n=b_n+2=\frac{2}{3^{n-1}+1}+2=\frac{2+2\cdot 3^{n-1}+2}{3^{n-1}+1}=\frac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$$

解法 2（処理は楽だが，特性方程式の解が重解の場合は使えない）

等比数列の形にしてから解く。

$a_n=b_n+2$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{b_n}{-b_n+3}$　$\therefore a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{-a_n+5}$　・・・①

$a_n=c_n+4$ とおくと，$c_{n+1}=\dfrac{3c_n}{-c_n+1}$　$\therefore a_{n+1}-4=\dfrac{3a_n-12}{-a_n+5}$　・・・②

$\dfrac{①}{②}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{a_n-2}{3a_n-12}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right)$

よって，数列$\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$は，初項$\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。

$$\therefore \frac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore 3^{n-1}a_n-2\cdot 3^{n-1}=-a_n+4$$

$$\therefore a_n=\frac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$$

方法 2

分数形漸化式の基本形に変形できる形 $\boldsymbol{a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{ra_n+s}}$ にしてから解く。

手順

$$a_{n+1}-x=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-x$$

↓

$$a_{n+1}-x=\frac{(p-rx)a_n+q-sx}{ra_n+s}$$

↓

$$a_{n+1}-x=\frac{(p-rx)\left(a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)}{ra_n+s}$$

ここで，左辺 $a_{n+1}-x$ と右辺の $a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}$ に注目して，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ となる x を求める。

重要補足

$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

よって，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ と $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は同じ方程式である。

したがって，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から解を求めればよい。

↓

特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ $\left(\text{または},-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)$ の解を α とすると，

$\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}=-\alpha$ より，$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}{ra_n+s}$ が得られる。

以後の処理も含めた分数漸化式の一般解の求め方は，以下の例を参照のこと

例 **1**：特性方程式の解が重解の場合

$a_1=5$， $a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{5x-16}{x-3}$ を解くと， $x^2-8x+16=0 \quad \therefore x=4$

$$a_{n+1}-4=\frac{5a_n-16}{a_n-3}-4$$
$$=\frac{a_n-4}{a_n-3}$$
$$=\frac{a_n-4}{(a_n-4)+1}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-4}=\frac{1}{a_n-4}+1$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-4}\right\}$ は，初項 $\dfrac{1}{a_1-4}=1$，公差 1 の等差数列である。

$$\therefore \frac{1}{a_n-4}=n$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{n}+4$$

例 **2**：特性方程式の解が異なる **2** 実数解の場合

$a_1=3$， $a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ を解くと， $x^2-6x+8=0 \quad \therefore x=2,4$

解法 **1**

$x=2$ のとき，

$$a_{n+1}-2=\frac{-a_n+8}{-a_n+5}-2$$
$$=\frac{a_n-2}{-a_n+5}$$
$$=\frac{a_n-2}{-(a_n-2)+3}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-2}=3\cdot\frac{1}{a_n-2}-1$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{2}=3\left(\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2}=3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n-2=\frac{2}{3^{n-1}+1}$$

$$\therefore a_n=\frac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$$

解法 2（特性方程式の解が重解の場合は無理）

$x=2$ のとき，$a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{-a_n+5}$　・・・③

$x=4$ のとき，$a_{n+1}-4=\dfrac{3(a_n-4)}{-a_n+5}$　・・・④

$\dfrac{③}{④}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{a_n-2}{3(a_n-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right)$

よって，数列$\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$は，初項$\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。

$$\therefore \frac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore 3^{n-1}a_n-2\cdot3^{n-1}=-a_n+4$$

$$\therefore a_n=\frac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$$

方法 3（特性方程式の解が重解の場合は使えない）

等比数列の漸化式：$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　に変形してから解く

この方法は，誘導形式の形で入試に出題されたことがある

求め方のしくみ

$a_n \xrightarrow{f} a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ から，

$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} \xrightarrow{h} \dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=h\left(\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ となるような α，β を求める。

↓

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ から，$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\cdot t^{n-1}$ が得られるので，

これから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

手順

$b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，関数 f,g,h の関係は以下のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
a_n & \xrightarrow{f} & a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s} \\
\downarrow g & & \downarrow g \\
b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} & \xrightarrow{h} & \begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}
\end{array}$$

したがって，

α と β を求めるには，

合成関数の連立方程式 $\begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}$ を解けばよい。

$$\begin{aligned}
b_{n+1}&=h(b_n)\\
&=h(g(a_n))\\
&=t\cdot g(a_n)\\
&=t\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}
\end{aligned}$$

$\therefore b_{n+1}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　・・・⑤

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= g(a_{n+1}) \\
&= g(f(a_n)) \\
&= \frac{f(a_n)-\alpha}{f(a_n)-\beta} \\
&= \frac{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta} \\
&= \frac{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)}{pa_n+q-\beta(ra_n+s)} \\
&= \frac{(p-r\alpha)a_n+q-s\alpha}{(p-r\beta)a_n+q-s\beta} \\
&= \frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}}
\end{aligned}
$$

$$\therefore b_{n+1}=\frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}} \quad ・・・⑥$$

⑤，⑥より，

$t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}$， $-\alpha=\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}$， $-\beta=\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}$

よって， α と β は方程式 $x=\dfrac{sx-q}{rx-p}$ を解くことにより求められ，

これを $t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}$ に代入することにより，公比 t が求められる。

重要補足

$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ より， $rx^2-(p-s)x-q=0$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1}, a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ より， $rx^2-(p-s)x-q=0$

よって， $-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ と $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は同じ方程式である。

したがって， $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1}, a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から

解を求めればよい。

まとめ

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ が異なる 2 実数解 α,β をもつとき，

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　$\left(t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}\right)$ と表せる。

例：特性方程式の解が異なる 2 実数解の場合

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ の解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$x^2-6x+8=0$　$\therefore x=2,4$

$\therefore \alpha=2$，$\beta=4$

ここで，$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，$t=\dfrac{-1-(-1)\cdot 2}{-1-(-1)\cdot 4}=\dfrac{1}{3}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n-4}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

$\therefore \dfrac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore 3^{n-1}a_n-2\cdot 3^{n-1}=-a_n+4$

$\therefore a_n=\dfrac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$