113　漸化式とハサミウチの原理

方法

漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ から数列 $\{a_n\}$ の極限 α を推測する。

↓

$|a_n-\alpha|=|f(a_{n-1})-\alpha|\leq r\cdot|a_{n-1}-\alpha|=r^{n-1}|a_1-\alpha|\quad(|r|<1)$ の形ができれば，

$|a_n-\alpha|\xrightarrow{n\to\infty}0$ より，$a_n\xrightarrow{n\to\infty}\alpha$ が成り立つ。

解

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するならば，$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ だから，

$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ において，$\alpha=1+\sqrt{1+\alpha}$ が成り立つ。

$\therefore(\alpha-1)^2=1+\alpha\quad\therefore\alpha^2-3\alpha=0$

これと $0<\alpha<3$ より，数列 $\{a_n\}$ が α に収束するならば，$\lim_{n\to\infty}a_n=3$ であると推測できる。

$\lim_{n\to\infty}a_n=3\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$ （$|a_n-3|$ は a_n と 0 の距離を表す。）

より，

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$ であることを示すには，$\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$ が成り立つことを示せばよい。

$n\geq2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
|a_n-3|&=\left|1+\sqrt{1+a_{n-1}}-3\right|\\
&=\left|\sqrt{1+a_{n-1}}-2\right|\\
&=\left|\left(\sqrt{1+a_{n-1}}-2\right)\times\frac{\sqrt{1+a_{n-1}}+2}{\sqrt{1+a_{n-1}}+2}\right|\\
&=\left|\frac{1}{\sqrt{1+a_{n-1}}+2}\right|\times\left|\left(\sqrt{1+a_{n-1}}-2\right)\left(\sqrt{1+a_{n-1}}+2\right)\right|\\
&=\left|\frac{1}{\sqrt{1+a_{n-1}}+2}\right||a_{n-1}-3|\\
&=\frac{1}{\sqrt{1+a_{n-1}}+2}|a_{n-1}-3|
\end{aligned}
$$

ここで，$0<a_{n-1}<3$ だから，$3<\sqrt{1+a_{n-1}}+2<4\quad\therefore\frac{1}{4}<\frac{1}{\sqrt{1+a_{n-1}}+2}<\frac{1}{3}$

よって，$|a_n-3| \leq \frac{1}{3}|a_{n-1}-3|$　$\therefore |a_n-3| = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|a_1-3|$

$\therefore \lim_{n\to\infty}|a_n-3| = 0$　$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 3$

補足：グラフから推測する方法

$a_{n+1} = f(a_n)$は，

$a_2 = f(a_1)$，$a_3 = f(a_2)$，・・・，$a_k = f(a_{k-1})$，$a_{k+1} = f(a_k)$，・・・より，

$y = f(x)$とすると，

a_nは，a_{n+1}にとっての定義域の数かつa_{n-1}にとっての値域の数である。

したがって，$y = x$を利用してa_nを値域を定義域の間で入れ替えることにより，

つまり，

x軸にa_nをとると，$y = a_{n+1} = f(a_n)$より，a_{n+1}はy軸の値になる。

次に，a_{n+1}をx軸にとる場合，$y = a_{n+1}$と$y = x$の交点のx座標をとればよい。

このとき，$y = a_{n+2} = f(a_{n+1})$より，a_{n+2}はy軸の値になる。

こうして，$a_{n+1} = f(a_n)$においてa_nがどのように変化していくかがわかる。