114　漸化式とハサミウチの原理

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ （α は 0 でない実数）とすると，$\alpha = \dfrac{2\alpha^2 + \alpha + 6}{3\alpha}$

$3\alpha^2 = 2\alpha^2 + \alpha + 6$　$\therefore (\alpha - 3)(\alpha + 2) = 0$　$3 \le \alpha$ より，$\alpha = 3$

よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ と推測できる。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|a_n - 3| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a_{n-1}{}^2 + a_{n-1} + 6}{3a_{n-1}} - 3\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a_{n-1}{}^2 - 8a_{n-1} + 6}{3a_{n-1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a_{n-1}(a_{n-1} - 3) - 2a_{n-1} + 6}{3a_{n-1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{3}(a_{n-1} - 3) + \frac{2(3 - a_{n-1})}{3a_{n-1}}\right|\end{aligned}$$

因数分解をするのが目的ではない。

$\dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 3)$ の形をつくるのが目的なのだ。

ここで，$a_{n-1} \ge 3$ より，$\left|\dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 3) + \dfrac{2(3 - a_{n-1})}{3a_{n-1}}\right| \le \left|\dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 3)\right|$

よって，$\lim_{n\to\infty}|a_n - 3| \le \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2}{3}(a_{n-1} - 3)\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}(a_1 - 3) = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$

これと $|a_n - 3| \ge 0$ より，$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$