

115 漸化式とハサミウチの原理

(3)

$$(2)より, \quad |x-a| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} |f(x)-f(a)|$$

これと $x_{n+1} = f(x_n)$, $f(a) = a$ より,

$$|x_1-a| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} |x_2-a| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 |x_3-3| \leq \cdots \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} |x_n-a|$$

ここで, $0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$, すべての n に対して, $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} |x_n-3| = 0$

$$\therefore 0 \leq |x_1-a| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} |x_2-a| \leq \cdots \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} |x_n-3| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

よって, はさみうちの原理より, $x_1 = 3$