

9・10・11

無理方程式・無理不等式の同値変形について

 $\sqrt{A} = B$ と必要十分の関係にあるための A と B の条件

$$\sqrt{A} = B \Rightarrow A = B^2 \text{ は真} \quad \dots \textcircled{1}$$

補足

 $\sqrt{A}$ より, $A \geq 0$ が保証されるから, 仮定に $A \geq 0$ は不要。

$$A = B^2 \Rightarrow B = \pm\sqrt{A} \text{ は真より,}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \sqrt{A} \text{ は真} \quad \dots \textcircled{2}$$

補足

$$A = B^2 \geq 0 \text{ より, } A \geq 0 \text{ は不要。}$$

しかし, $B \geq 0$ であることは保証できないから, $B \geq 0$ が必要。

①, ②より,

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

 $\sqrt{A} \leq B$ と必要十分の関係にあるための A と B の条件

$$\sqrt{A} \leq B \Rightarrow A \leq B^2 \text{ は真} \quad \dots \textcircled{3}$$

補足

$$0 \leq \sqrt{A} \leq B \text{ より, } A \leq B^2 \text{ が成り立つ。}$$

③の逆が成り立つための条件

 $A \leq B^2$ だけでは, $A \geq 0$ が保証されないから, $\sqrt{A}$ とできるには $A \geq 0$ が必要。また, このとき $\sqrt{A} \geq 0$ だから, $\sqrt{A} \leq B$ が成り立つには $B \geq 0$ が必要。

よって, 逆が成り立つための条件は,

$$A \leq B^2, \quad A \geq 0, \quad B \geq 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④より,

$$\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B^2 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

 $B \leq \sqrt{A}$ と必要十分の関係にあるための A と B の条件 $B \leq \sqrt{A}$ には, $B \leq 0 \leq \sqrt{A}$ の場合と $0 \leq B \leq \sqrt{A}$ の場合がある。

よって,

$$B \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow B \leq 0 \leq \sqrt{A} \text{ または } 0 \leq B \leq \sqrt{A} \quad \dots \textcircled{5}$$

 $B \leq 0 \leq \sqrt{A}$ と必要十分の関係にあるための A と B の条件 $B \leq 0$ 以外に A を $\sqrt{A}$ とできなければならないから $A \geq 0$ が必要。

$$\text{よって, } B \leq 0 \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{6}$$

$0 \leq B \leq \sqrt{A}$ と必要十分の関係にあるための A と B の条件

$B \geq 0$ 以外に $B^2 \leq A$ が必要であるが、

$\sqrt{A}$ とできるための $A \geq 0$ は $B^2 \leq A$ で保証されるから不要。

$$\text{よって, } 0 \leq B \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{7}$$

⑤, ⑥, ⑦より,

$$B \leq \sqrt{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$$