

29

公比 r の等比数列の第 x 項から第 y 項までの和 $= \frac{a_x - a_{y+1}}{1-r}$ より,

$$\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

等比数列の和の公式とその導き方

等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると,

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

あるいは

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

導き方 1: 階差数列を利用

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n ar^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{ar^{k-1}(r-1)}{r-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{ar^k - ar^{k-1}}{r-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{r-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k+1}}{1-r} \\ &= \frac{1}{1-r} \{ (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) \} \\ &= \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

導き方 2 : 級数 (数列の和) を利用

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 \cdots + ar^{n-1} + ar^n)$$

$$= a - ar^n$$

$$= a_1 - a_{n+1}$$

$$\therefore (1-r)S_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r} \text{ は, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ より使い勝手が良い}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r} \text{ が意味するのは,}$$

「等比数列の第 1 項から第 n 項までの和は, $\frac{\text{第1項の値} - \text{第}(n+1)\text{項の値}}{1-r}$ で与えられる」

ということだから,

等比数列の第 x 項から第 y 項までの和を求める際に, 即座に $\frac{a_x - a_{y+1}}{1-r}$ と反応できる。

実際, 第 x 項から第 y 項までの和は,

「初項から第 y 項までの和 S_y - 初項から第 $(x-1)$ 項までの和 S_{x-1} 」だから,

それで確かめてみると,

$$S_y - S_{x-1} = \frac{a_1 - a_{y+1}}{1-r} - \frac{a_1 - a_{(x-1)+1}}{1-r}$$

$$= \frac{a_1 - a_{y+1}}{1-r} - \frac{a_1 - a_x}{1-r}$$

$$= \frac{a_x - a_{y+1}}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ の公式の場合,}$$

$1-r^n$ の 1 は, 第 1 項の $r^0 = 1$ の意味であるが, その意味が見えにくくなっているため, 上のように, 即座に反応しにくい。

$$S_n = \frac{a(r^0 - r^n)}{1-r} \text{ としても, つらいかな} \cdots$$

等差数列においてもわかりやすい公式で理解しよう

$$\text{等差数列の和} = \text{項の値の平均値} \times \text{項数} = \frac{\text{最初の項の値} + \text{最後の項の値}}{2} \times \text{項数}$$